

导学 5.5

(5.6 空间曲线及其方程)

一、相关问题

1. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ 在 zOx 面上的投影为何种曲线?
2. 在空间直角坐标系中, 旋转抛物面 $x^2 + y^2 = z$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的交线是什么图形? 一般来说, $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 代表什么图形?

二、相关知识

1. 如果空间一动点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上从点 $M_0(a, 0, 0)$ 出发以角速度 ω 绕 z 轴旋转, 同时又以线速度 v 沿 z 轴正方向上升(其中 ω, v 都是常数), 那么动点 M 的运动轨迹称为螺旋曲线, 试建立其方程.
2. 怎么定义空间曲线的方程?
3. 空间曲线在坐标平面上的投影一般是什么图形, 如何建立这个投影图形的方程?

三、练习题

1. 方程组 $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases}$ 代表什么空间曲线?
2. 分别求母线平行于 x 轴和 y 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 的柱面方程.
3. 已知两个球面的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$, 求它们的交线 C 在 xoy 平面上的投影.

四、思考题

1. 试求椭圆面 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 与平面 $y = 1$ 的交线方程.
2. 设空间一动点到点 $(2, 0, 0)$ 的距离为到点 $(-4, 0, 0)$ 的距离的一半, 求该动点的轨迹方程.
3. 求抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $y + z = 1$ 的交线在 xoy 平面上的投影曲线方程.
4. 设一个立体由上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 和锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 所围成, 求它在 xoy 面上的投影.