

导学 6.4

(6.1.6 方向导数 6.1.7 梯度)

一、相关问题

1. 一块长方形的金属板,四个顶点的坐标是 $(1, 1)$, $(5, 1)$, $(1, 3)$, $(5, 3)$. 在坐标原点处有一个火焰,它使金属板受热. 假定板上任意一点处的温度与该点到原点的距离成反比. 在 $(3, 2)$ 处有一个蚂蚁,问这只蚂蚁应沿什么方向爬行才能最快到达较凉快的地点?

2. 假设你在攀登一座形状满足方程 $z = 1\,000 - 0.01x^2 - 0.02y^2$ 的山峰,且正处在坐标为 $(60, 100, 764)$ 的位置.

(1) 为了最快到达山顶,此时你应选择哪个方向行进?

(2) 如果沿以上所确定的方向行进,初始的上升角度是多少?

二、相关知识

1. 函数的方向导数有什么几何意义?

2. 函数的方向导数与函数的连续、可导、可微之间有什么关系?

3. 函数的梯度有何几何意义?

4. 函数的梯度与方向导数有什么区别和联系?

三、练习题

1. 求函数 $u = xyz$ 在点 $(5, 1, 2)$ 处沿从点 $(5, 1, 2)$ 到点 $(9, 4, 14)$ 的方向的方向导数.

2. 问函数 $u = xy^2z$ 在点 $P(1, -1, 2)$ 处沿什么方向的方向导数最大? 并求此方向导数的最大值.

四、思考题

1. 偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 及 $f'_y(x_0, y_0)$ 分别就是函数 $f(x, y)$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 处沿 Ox 轴方向($\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i}$)及沿 Oy 轴方向($\boldsymbol{l} = \boldsymbol{j}$)的方向导数. 这种说法对吗?

2. 讨论函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 处的连续性、一阶偏导数的存在性、方向导数的存在性、可微性.