

导学 6.5

(6.2 多元函数微分法 6.2.1 复合函数的微分法 6.2.2 全微分形式不变性)

一、相关问题

1. 设 $u = f(x, xy, xyz)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 显然 u 是 x, y, z 的三元函数, 如何求 u 的一阶、二阶偏导数.
2. 一元函数的一阶微分形式不变性是什么?

二、相关知识

1. 如何确定复合函数的中间变量及自变量?
2. 如何确定复合函数的高阶导数中的中间变量及自变量?

三、练习题

1. 设 $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$, $x = 2\sin t$, $y = 3t$, 求 $\frac{dz}{dt}$.
2. 设 $z = f(x, u, v)$ 可微, $u = g(x, v, y)$, $v = h(x, y)$ 的偏导数存在, 求 dz .
3. 设 $z = \int_0^{x^2y} f(t, e^t) dt$, 其中 f 具有一阶连续偏导数, 求 dz 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
4. 设 $z = f(ax + by) + g(x^2y, xy^2)$, 其中 f, g 都有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
5. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处可微, 且 $f(1, 1) = 1$, $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 2$, $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} = 3$,
 $g(x) = f(x, f(x, x))$, 求 $\left. \frac{d}{dx} g^3(x) \right|_{x=1}$.

四、思考题

1. 设 $z = f(u, v, x)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, 则 $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x}$, 试问 $\frac{dz}{dx}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是否相同? 为什么?
2. 若函数 $z = f(x, y)$ 存在偏导数, 但是不可微, 且 $x = x(t)$, $y = y(t)$, 那么复合函数的导数公式 $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ 是否还成立?
3. 设二元函数 $u = u(x, y)$ 有二阶连续偏导数, 并满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 且 $u(x, 2x) = x$, $u'_x(x, 2x) = x^2$, 求 $u''_{xx}(x, 2x)$, $u''_{xy}(x, 2x)$, $u''_{yy}(x, 2x)$.