

导学 6.7

(6.2.4* 二元函数的 Taylor 公式)(选学)

一、相关问题

我们已知：一元函数的 Taylor 公式

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &+ \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

即用一个 n 次多项式来表达一个一元函数 $f(x)$ ，且误差是当 $x \rightarrow x_0$ 时比 $(x - x_0)^n$ 高阶的无穷小。

问题：能否用多个变量的多项式来近似表达一个给定的多元函数，并能具体地估算出误差的大小？

二、相关知识

1. 多元函数的 Taylor 公式与一元函数的 Taylor 公式有什么异同？
2. 多元函数的 Taylor 公式有何应用？

三、练习题

1. 将二元函数 $f(x, y) = x \ln(1 + y)$ 在点 $(1, 0)$ 处展开到二阶 Taylor 公式.
2. 求 $f(x, y) = x^y$ 在点 $(1, 4)$ 的 Taylor 公式 (到二阶为止)，并用它计算 $1.08^{3.96}$.

四、思考题

求函数 $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ 的三阶 Maclaurin 公式.