学院　　　　　　班级　　　　　　姓名　　　　　　学号

导学 7.1

（7.1 重积分　7.1.1 二、三重积分的概念与性质）

一、相关问题

1. 给定一个曲顶柱体 $z=f(x,y)\geqslant 0$，$(x,y)\in D_{xy}$，如何求其体积?
2. 给定一个非均匀的平面薄片，如何求其质量?
3. 给定一个非均匀的空间立体，如何求其质量?

二、相关知识

1. 二重积分的定义形式、几何意义、物理意义各是什么?
2. 三重积分的定义式，几何、物理意义各是什么?
3. 重积分的统一定义是如何给出的?

三、练习题

1. 已知 $f(x,\ y)=x^2y$，$D=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$，用二重积分的定义求 $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. 利用二重积分的几何意义，计算 $\iint\limits_D\sqrt{k^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 D：$x^2+y^2\leqslant k^2$.

3. 利用二重积分的对称性计算以下二重积分

(1) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}(3-x^2\sin xy)\mathrm{d}\sigma$；(2) $\iint\limits_D\dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$x^2+y^2\leqslant 4$.

4. 比较下列积分的大小：

$I_1=\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x+y=1$，x 轴，y 轴围成.

5. 设 $f(x,\ y)$ 为连续函数，求极限 $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ b\to 0}}\dfrac{1}{\pi ab}\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma$，

其中 $D=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

四、思考题

在二重积分的定义中，关于区域的分割程度的描述为什么要求 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中最大的直径趋于零，可不可以改为要求 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中最大的面积趋于零?