

导学 7.14

(7.2.6 Gauss 公式 7.2.7 Stokes 公式)

一、相关问题

阐述 Gauss 公式的两种表示方法.

二、相关知识

1. Gauss 公式的实质是什么?
2. Gauss 公式添加辅助面的技巧是什么?
3. Stokes 公式的实质是什么?
4. Stokes 公式和格林公式的联系是什么?
5. 在什么条件下, 第二类空间曲线积分与路径无关?

三、练习题

1. 计算 $\oint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧.

2. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$, 其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ ($z \geq 0$) 的上侧.

3. 计算积分 $\oint_{\Sigma} \frac{ydydz - xdzdx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中 Σ 是任一包围原点的分片光滑闭曲面的外侧.

4. 利用 Stokes 公式计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$, 其中 Γ 为平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手规则;

5. 计算积分 $\oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$, 其中 Γ 为用平面 $x + y + z = 0$ 截球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 若从 x 轴的正向看去取逆时针方向.

6. 利用 Stokes 公式计算曲线积分.

$$I = \oint_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$$

其中 Γ 是用平面 $x + y + z = \frac{3}{2}$ 截立方体: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 的表面所得的截痕, 若从 x 轴的正向看去取逆时针方向.

四、思考题

设 Γ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 求曲线积分 $\oint_{\Gamma} xzdx + xdy + \frac{y^2}{2} dz$.