导学 7.4

（7.1.3 直角坐标系下三重积分的计算）

一、相关问题

1. 在直角坐标系下画出下列空间区域的图象.

（1）由 $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$ 及 $z=1$ 围成的闭区域；

（2）由 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=1-x^2$ 围成的闭区域；

（3）由 $z=x^2+y^2$, $y=x^2$ 及 $y=1$, $z=0$ 围成的闭区域.

2. 在直角坐标系下将下列空间区域写成不等式组的表示.

（1）由 $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$ 及 $z=1$ 围成的闭区域；

（2）由 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=1-x^2$ 围成的闭区域；

（3）由 $z=x^2+y^2$, $y=x^2$ 及 $y=1$, $z=0$ 围成的闭区域.

二、相关知识

1. 阐述用“先一后二”法化三重积分为三次积分的步骤.
2. 阐述用“先二后一”法化三重积分为三次积分的步骤.
3. 三重积分的对称性如何使用?

三、练习题

1. 若 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1\}$，计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

2. 设 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=h$ 所围成的空间闭区域（$h>0$），化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}v$ 为直角坐标系下的三次积分（顺序为 $z\to y\to x$）.

3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

四、思考题

在直角坐标系下，通常在什么情况下使用“先重后单”（先二后一）法或“先单后重”（先一后二）法计算三重积分?