学院　　　　　　　　班级　　　　　　　　姓名　　　　　　　　学号

导学 7.5

（7.1.3 柱坐标、球坐标系下三重积分的计算）

一、相关问题

1. 由曲面 $z=x^2+y^2$, $z=1$ 围成的空间立体，体密度为 $e^{-x^2-y^2}$，如何求其质量？
2. 设空间立体为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，体密度为 $\dfrac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，如何求其质量？

二、相关知识

1. 柱面坐标系有何特点？球坐标系有何特点？
2. 写出在柱面坐标系中的 dV 如何表示？为什么？
3. 写出在球面坐标系中的 dV 如何表示？为什么？

三、练习题

1. 由曲面 $z=x^2+y^2$, $z=1$ 围成的空间立体的体密度为 $e^{-x^2-y^2}$，如何求其质量.
2. 将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2, z)\,dv$ 化为柱坐标系下的三次积分，其中 Ω 为介于 $z=1$, $z=2$ 之间的圆柱：$x^2+y^2\leqslant a^2$.
3. 设空间立体为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，体密度为 $\dfrac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，如何求其质量？
4. 设 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dv$　Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=4$ 围成，将此三重积分分别以 z, r, θ 和 r, θ, z 的次序化为三次积分.
5. 在以下两种不同的积分域下，将球坐标系下积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$ 化为球坐标系下的三次积分

   (1) Ω: $R_1^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R_2^2$；(2) Ω: 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{12-x^2-y^2}$ 围成.

四、思考题

1. 化三重积分为三次积分其顺序为先 z 再 r 后 θ（或先 r 再 θ 后 z）与直角坐标系中的“先单后重”法（或“先重后单”法）有何关系？
2. 用柱、球坐标系计算三重积分时，积分区域 Ω 域和被积函数 $f(x, y, z)$ 有何特点？