

导学 7.8

(7.1.5 重积分的应用(物理应用))

一、相关问题

1. 由物理学知道, 若 xoy 平面上有 n 个质点, 它们分别位于 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 处, 质量分别为 $m_1, m_2, \dots, m_n$. 则该质点系的重心的坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

假设有一平面薄片, 占有 xoy 面上的闭区域 D , 在点 (x, y) 处的面密度为 $\rho(x, y)$, 假定 $\rho(x, y)$ 在 D 上连续, 如何求该平面薄片的重心?

2. 设空间物体占有的区域为 Ω , 其体积为 V , 体密度为常数 ρ , 由物理学知道该空间物体的质量为 $M = \rho V$. 但是一般的物体的体密度都是变化的, 如何求其质量 M ? 例如, 给定的空间物体为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$, 其各点处的体密度等于该点到坐标原点距离的平方, 分析如何求该物体的质量、重心坐标?

二、相关知识

1. 写出利用二、三重积分计算平面薄片、空间物理的质量、重心、转动惯量、对质点的引力等物理量的有关公式.
2. 给出本导学相关问题中第 2 问的计算过程.

三、练习题

1. 求位于两圆 $r = a \cos \theta$ 及 $r = b \cos \theta$ ($0 < a < b$) 之间的均匀薄片的重心坐标.
2. 设一均匀的直角三角形薄板, 两直角边长分别为 a, b , 求这三角形对其中任一直角边的转动惯量.
3. 一物体由半径为 4 和 8 的两个同心球所围成, 且其上任一点的密度与该点到球心的距离成反比, 而且已知离球心为 5 处的密度为 1, 求此物体的质量.

四、思考题

1. 在半径为 a 的均匀半球体靠圆面的一旁拼接一个半径与球相同, 材料相同的圆柱体. 拼接后的整体的重心位于球心, 试求圆柱体的高为多少?
2. 归纳运用定积分、重积分的“微元法”(“元素法”)解决实际问题的思想方法.