

导学 8.3

(8.2.4 Bernoulli 方程 8.2.5 全微分方程)

一、相关问题

1. 如何求微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^2\sqrt{y}$ 的通解?
2. 如何求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + x^3 + y}{1 + x}$ 的通解?

二、相关知识

1. Bernoulli 方程的标准形式是什么? 如何求解全微分方程?
2. 下列方程各是什么类型的方程? 并将它们写成该类型方程的标准形式.

$$(1) \frac{dy}{dx} = y + xy^5;$$

$$(2) y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x};$$

$$(3) \frac{dy}{dx} - 2xy = 4x;$$

$$(4) (5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy = 0.$$

三、练习题

求下列微分方程的通解

$$1. \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a(\ln x)y^2.$$

$$2. (5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy = 0.$$

$$3. (1 + xy)ydx + (1 + xy)x dy = 0.$$

$$4. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y}.$$

四、思考题

1. 凡是可分离变量的方程必是全微分方程吗?
2. 已知连续可微函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = -\frac{1}{2}$, 且

$$\int_L [e^{-x} + f(x)] y dx - f(x) dy$$

与路径 L 无关, 求函数 $f(x)$ 并计算以 $O(0, 0)$ 为起点, 沿着曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 到点 $A(1, 1)$ 的路径 OA 的曲线积分值.