

导学 8.4

(8.3.1 可降阶的高阶微分方程 8.3.2 二阶线性微分方程——解的结构)

一、相关问题

1. 质量为 m 的质点受力 F 的作用沿 Ox 轴作直线运动, 设力 F 仅是时间 t 的函数 $F = F(t)$. 在开始时刻 $t = 0$ 时, $F(0) = F_0$, 随着时间的增大, 此力 F 均匀地减小, 直到 $t = T$ 时 $F(T) = 0$. 如果开始时质点在原点, 且初速度为 0, 求质点的运动规律.

2. 设有一均匀柔软的绳索, 两端固定, 绳索仅受重力作用而下垂, 问该绳索的平衡状态是怎样的曲线.

二、相关知识

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的?

$$(1)e^{2x}, 3e^{2x};$$

(2) $\cos 2x, \sin 2x$;

(3) $\sin 2x, \cos x \sin x$;

(4) e^{-x}, e^x ;

(5) e^{ax} , e^{bx} ;

(6) $\ln x, x \ln x$.

2. 已知 y_1 和 y_2 是一个二阶齐次线性微分方程的线性无关的特解, 如何写出该方程的通解?

三、练习题

1. 求 $y''' = x^2 + \sin x$ 的通解.

2. 求微分方程 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 3$ 的特解.

3. 求解微分方程 $2yy'' + y'^2 = 0$.

4. 设 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x - e^{-x}$, $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解, 求此微分方程.

四、思考题

1. 给出 n 阶线性微分方程的 n 个解, 能否写出这个微分方程及其通解?

2. 可以验证 $y_1 = (x-1)^2$ 和 $y_2 = (x+1)^2$ 都是微分方程 $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ 和 $2yy'' - (y')^2 = 0$ 的解, 但这两个解的线性组合 $y = C_1(x-1)^2 + C_2(x+1)^2$ (其中 C_1, C_2 是任意常数) 为什么只满足前一个方程而不满足后一个方程?