

导学 8.5

(8.3.2 二阶线性微分方程 —— 刘维尔公式和常数变易法

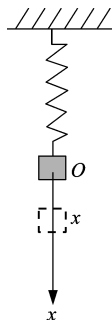
8.3.3 二阶常系数齐次线性微分方程)

一、相关问题

质量为 m 的物体自由悬挂在一端固定的弹簧上, 在无外力作用下做自由运动, 取其平衡位置为原点建立坐标系如右图,

设 $t = 0$ 时物体的位置为 $x = x_0$, 初始速度为 v_0 . 由物理学知, 位移满足自由振动方程

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0 \\ x \Big|_{t=0} = x_0, \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$



其中 n 为阻尼系数, 则讨论下列两种情形下的运动规律:

- (1) 求无阻尼自由振动情况 ($n = 0$) 物体的运动规律;
- (2) 求有阻尼自由振动情况物体的运动规律.

二、相关知识

1. 已知二阶线性微分方程的一个特解 y_1 , 如何求出该方程的通解?

2. 二阶常系数齐次线性方程的线性无关的特解之间有什么关系?

3. 对于二阶齐次线性微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$,

当函数 $P(x), Q(x)$ 满足_____时, 方程有一个特解 $y = x$;

当函数 $P(x), Q(x)$ 满足_____时, 方程有一个特解 $y = e^x$;

当函数 $P(x), Q(x)$ 满足_____时, 方程有一个特解 $y = e^{-x}$.

三、练习题

1. 求方程 $y^{(4)} + \beta^4 y = 0$ 的通解, 其中 $\beta > 0$.

2. 求方程 $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = x - 1$ 的通解.

3. 求解 $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' + y' + y = 0$.

四、思考题

求方程 $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$ 的通解, 下列解法是否正确? 如果不正确, 如何改正?

解 特征方程为 $(1 + x^2)r^2 + 2xr = 0$, 特征根为: $r_1 = 0, r_2 = -\frac{2x}{1+x^2}$,

从而得方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-\frac{2x}{1+x^2}}.$$