

习题 1.4

1. (1) 对; (2) 错, 例如 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ -1, & x \notin Q, \end{cases}$ (3) 对;

(4) 错, 例如 $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = -\operatorname{sgn} x$ 在 $x \rightarrow 0$ 的极限都不存在, 但 $f(x) + g(x) \equiv 0$ 在 $x \rightarrow 0$ 的极限存在;

(5) 错, 例如, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 但可以证明 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$;

(6) 对; (7) 错, 例子同(5).

2. (1) 错, 例如 $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^+$, 当 $n=1$ 时, $x_1 = 1 > \frac{1}{2} = y_1$, 故对任意 $n \in \mathbf{N}^+$, $x_n < y_n$ 不成立;

(2) 错, 例如 $x_n = \frac{1}{n^2}$, $z_n = n$, $n \in \mathbf{N}^+$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n z_n = 0$; (3) 对.

3. (1) 错, 因为第二个因式极限不存在, 所以不能用极限的四则运算法则求极限;

(2) 错, 因为分子与分母的极限不存在, 所以不能用极限的四则运算法则求极限;

(3) 错, 因为分母的极限为 0, 所以不能用极限的四则运算法则求极限.

4. (1) $\frac{1}{5}$; (2) 2; (3) $\frac{1}{2}$; (4) $\frac{1}{3}$.

5. (1) 0; (2) $\frac{n(n+1)}{2}$; (3) -1; (4) $\frac{1}{2}$; (5) $\sqrt{2}$; (6) $\frac{1}{n}$;

(7) $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$; (8) ∞ ; (9) $\frac{1}{24}$; (10) 2.

6. $f(x) = x^2 - 2x$.

7. $a = 1$, $b = -1$;

8. $a = \frac{3}{16}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 2$.