习题4.5

1. (1)$f(x)=\pi^2+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 12}{n^2}\cos nx.$

(2)$f(x)=\frac{1}{\pi}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})\left(\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n 2}{n^2+4}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+4}\sin nx\right)\right),\ x\neq(2k+1)\pi,$

当$x=(2k+1)\pi$时，$\frac{e^{2\pi}+e^{-2\pi}}{2}.$

(3) 当$x=(2k+1)\pi$时，$\frac{a-b}{2}\pi.$

$x\neq(2k+1)\pi$时，

$$f(x)=\frac{a-b}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}(b-a)\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}(a+b)}{n}\sin nx\right),$$

2. (1)$f(x)=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{9n^2-1}\sin nx\quad x\in(-\pi,\pi)$

(2)$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx=\frac{e^{\pi}-1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{(n^2+1)\pi}(\cos nx-n\sin nx).$

其中$-\infty<x<+\infty$，$x\neq n\pi$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

3. $f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}+\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\right]\cos n\pi x+\frac{1-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\sin n\pi x\right\},$

$(x\neq 2k,\ x\neq 2k+\frac{1}{2},\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$

4. $f(t)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}(\cos t+\frac{1}{3^2}\cos 3t+\frac{1}{5^5}\cos 5t+\cdots)+(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t-\frac{1}{4}\sin 4t+\cdots)$

5. $f(x)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots),\ (-2<x<0,\ 0<x<2).$

6. (1)$f(x)=\frac{11}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos 2n\pi x.$

(2)$f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi x+\frac{1-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\sin n\pi x\right],$

$x\neq 2k,\ 2k+\frac{1}{2}.$

当$x=2k$时，

$$-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi x+\frac{1-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\sin n\pi x\right]=\frac{1}{2};$$

当$x=2k+\frac{1}{2}$时，

$$-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi x+\frac{1-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\sin n\pi x\right]=0.$$

(3)$f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{(-1)^{n+1}6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right]$, $x\neq 3\ (2k+1)$.

当 $x=3(2k+1)$ 时，$-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right]=-2$.

7. $f(x)=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}\quad\left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$；$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

8. $f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi\left(n^2-\frac{1}{4}\right)}\cos nx$.

9. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx$, $x\neq(2k+1)\pi$.

当 $x=(2k+1)\pi$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx=0$.