习题8.3

1. (1) $y=\frac{1}{9}e^{3x}-\sin x+C_1x+C_2$;

(2) $y=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2$;

(3) $y=1+C_2e^{C_1x}(C_2\neq 0)$;

(4) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+(C_3\cos 3x+C_4\sin 3x)$;

(5) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$;

(6) $y=C_1+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x$;

(7) $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$;

(8) $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{e^x}{1+a^2}$;

(9) $y=e^{3x}(C_1+C_2x)+e^x\left(\frac{3}{25}\cos x-\frac{4}{25}\sin x\right)$;

(10) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x+\frac{\sin x}{2}-\frac{\cos x}{2}$;

(11) $y=C_1x^2+\frac{C_2}{x^2}+\frac{x^3}{5}$;

(12) $y=\frac{C_1}{x}+C_2x^3+C_3-\frac{x^2}{2}$;

(13) $y=\ln x\sin\ln x+C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x$;

(14) $\ln y=C_1e^x+C_2e^{-x}$;

(15) $y=C_2\sqrt{C_1+x^2}$(提示：可令 $y=e^u$，方程化为 $u''+2u'2-\frac{1}{x}u'=0$)；p

(16) $y=C_1e^x+C_2e^xx^3$;

(17) $x=C_1e^y+C_2e^{-y}+\frac{1}{3}e^{2y}$(提示：$y'=\frac{1}{x'}$，$y''=-\frac{x''}{x'^3}$，代入原方程，可得 $x''-x=e^{2y}$).

2. (1) $y=\frac{4}{(x-2)^2}$；(2) $y=(2+x)e^{-\frac{x}{2}}$；(3) $y=3e^{-2x}\sin 5x$；

(4) $y=e^x-e^{-x}+x(x-1)e^x$；(5) $y=\arcsin x$；(6) $y=2e^{\frac{1}{2}x}-2e^{-x}-2x(x+\frac{4}{3})e^{-x}$.

3. $y=C_1e^x+C_2x^2+3$.

5. $y=C_1x+C_2x^2-3x\ln x$.

6. $\alpha=-3$，$\beta=2$，$\gamma=-1$，通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x$.

7. $x=C_1e^t+C_2e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$.

8. 曲线 $y=y(x)$ 满足的方程是 $\frac{y^2}{y'}=2k\int_0^x y(t)\,dt$，即满足微分方程 $yy''+2(k-1)y'^2=0$，得所求曲线方程 $y=Cx^{\frac{1}{2k-1}}$.