习题 3

注意：当方程组有无穷多解时基础解系或通解的表示不唯一，以下答案仅做参考，可以有不同.

1. (1) $c\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}(c\in R)$； (2) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-5\\3\\14\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}(c_1, c_2\in R)$；

(3) $c\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-3\\\frac{4}{3}\\1\end{pmatrix}(c\in R)$； (4) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}(c_1, c_2\in R)$.

2. (1) 无解；(2) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\0\\0\end{pmatrix}(c_1, c_2\in R)$；

(3) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\0\end{pmatrix}(c\in R)$；(4) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\\0\end{pmatrix}(c_1, c_2\in R)$.

3. (1) $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$；(2) $\lambda=-2$；

(3) $\lambda=1$, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(c_1, c_2\in R)$.

4. (1) $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\-3\end{pmatrix}$； (2) $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\7\\0\\19\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-n\end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\-n+1\end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\-2\end{pmatrix}$.

5. 提示：(1) 增广矩阵的秩为 4，但系数矩阵的秩小于等于 3；(2) 增广矩阵和系数矩阵的秩都为 2，对应的齐次线性方程组基础解系含有 $3-2=1$ 个解向量；通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}_1+c(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_1)=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\ (c\in R).$$

6. 提示：由 $|\boldsymbol{A}|=0$，且 $A_{ij}\neq 0$ 可知 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，再利用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=0$ 即可 .

7. 提示：先证 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 均是齐次线性方程组的解，然后证明它们线性无关即可.

8. $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\2x_1-3x_3+x_4=0.\end{cases}$（注：答案不唯一）

（提示：设所求方程组为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=0\Rightarrow(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$，考虑方程组 $\begin{pmatrix}0&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=0$ 即可求出 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\2&-3&0&1\end{pmatrix}$）

9. $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0\\3x_1+2x_2-2x_4=0\end{cases}$（或$\begin{cases}x_1-2x_3+2x_4=0\\x_2+3x_3-4x_4=0\end{cases}$等）.

10. $\begin{pmatrix}1&0\\5&2\\8&1\\0&1\end{pmatrix}$（或$\begin{pmatrix}1&-1\\5&11\\8&0\\0&8\end{pmatrix}$等）.

11. (1) Ⅰ：$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$；Ⅱ：$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$；(2) $\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}(c\in R)$.

12. (1) $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$；(2) $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-17\\0\\14\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-9\\1\\7\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\\frac{7}{2}\\1\end{pmatrix}$.

13. $\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}(c\in R)$.

14. $\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}(c\in R)$.

15. (1) $\lambda\neq-4$；(2) $\lambda=-4$ 且 $\mu=0$，$\boldsymbol{b}=c\boldsymbol{a}_1-(2c+1)\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3(c\in R)$；
(3) $\lambda=-4$ 且 $\mu\neq0$.

16. $\boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (c \in R)$.

（提示：$R(\boldsymbol{A}) = 3$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 \Rightarrow (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$，

由 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 \Rightarrow (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}$）

17. 略.

18. 略.

19. 略.

20. $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 7 - 3c_1 & 5 - 3c_2 & 7 - 3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ -9 + 5c_1 & -3 + 5c_2 & -7 + 5c_3 \end{pmatrix}$，$(c_1, c_2, c_3 \in R)$.