

导学 4.1

(4.1 矩阵的特征值与特征向量 4.1.1 正交矩阵与正交变换 4.1.2 特征值与特征向量)

一、相关问题

1. 试用矩阵表示平面上的旋转变换, 观察矩阵的列向量组各向量之间的关系.
2. 两个向量 $OA = (a_1, a_2)^T$, $OB = (b_1, b_2)^T$ 经旋转变换后, 讨论变换前后它们的模的变化及它们之间夹角的变化.

二、相关知识

1. 简述正交矩阵、正交变换的定义、性质;
2. 如何判断矩阵是否为正交矩阵;
3. 特征值、特征向量的定义、性质;
4. 如何求特征值、特征向量.

三、练习题

1. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ 是否为正交矩阵?

2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

3. 设 n 阶方阵 A 的元素全为 1, 则 A 的 n 个特征值是_____.
4. 设 A 为 n 阶方阵, $Ax=0$ 有非零解, 则 A 必有一个特征值为_____.

四、思考题

1. 若 A, B 为 n 阶正交矩阵, 问: A^{-1} , A^* , AB 是否为正交矩阵?
2. 设 λ 为 n 阶方阵 A 的一个特征值,
 - (1) 求 kA , A^m , $aA + bE$ 的特征值 (k, a, b 均为常数, m 为正整数);
 - (2) 当 A 可逆时, 求 A^{-1} , A^* , $aA^{-1} + bA^*$ 的特征值.
3. 设 a, b, c 为实数, 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2c \end{pmatrix}$ 为正交矩阵的条件.