

导学 4.2

(4.2.1 相似矩阵与矩阵可对角化的条件 4.2.2 实对称矩阵的对角化)

一、相关问题

在某城市有 15 万具有本科以上学历的人，其中有 1.5 万人是教师，据调查，平均每年有 10% 的人从教师职业转为其他职业，又有 1% 的人从其他职业转为教师职业，试预测 10 年以后这 15 万人中有多少人在从事教师职业.

二、相关知识

1. 简述相似矩阵的定义、性质.
2. 矩阵可对角化的条件是什么?
3. 实对称矩阵的性质.
4. 如何将实对称矩阵对角化.

三、练习题

1. 判定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 能否相似于对角阵，若相似，则求出可逆矩阵 P ，使 $P^{-1}AP$ 是对角阵.

2. 设三阶方阵 A 的特征值为 $-1, 0, 1$ ，则与方阵 $B = A^3 - A + 2E$ 相似的对角矩阵为_____.

3. 已知实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，求一个正交矩阵 P ，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

4. 设三阶实对称矩阵 A 的三个特征值为 $1, 1, -1$ ， A 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，求矩阵 A .

四、思考题

1. 若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则它们有相同的特征值. 反过来，若 A 与 B 有相同的特征值，那么(1)它们是否相似？(2)在什么条件下，它们必定相似？
2. 若 n 阶矩阵 A 的秩 $R(A) = r < n$ ，那么(1) $\lambda = 0$ 是不是 A 的 $n - r$ 重特征值？(2)什么情形下， $\lambda = 0$ 一定是 A 的 $n - r$ 重特征值？