

导学 4.3

(4.3.1 二次型及其标准形 4.3.2 正定二次型)

一、相关问题

1. 方程 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4yz = 0$ 表示怎样的曲面?
(可变换成曲面的标准方程 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 表示椭圆柱面)
2. 求以下实函数的最大值或最小值:
(1) $f = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz + 4yz$;
($f = (x + 2y - z)^2 + y^2 + 8yz + 4z^2$, 没有最大值和最小值)
(2) $f = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz - 2yz$;
($f = (x + 2y - z)^2 + (y + z)^2 + 3z^2$, 有最小值 0; 没有最大值)

二、相关知识

1. 二次型定义及矩阵表示?
2. 利用正交变换化二次型为标准形?
3. 利用配方法化二次型为标准形?
4. 惯性定理、二次型正定的判定方法.

三、练习题

1. 用矩阵记号表示下列二次型: $f = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 4yz$.
2. 用正交变换法将二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$ 化为标准形.
3. 用配方法将二次型 $f = x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2x_3$ 化为标准形.
4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$ 是正定的, 求 k 的取值范围.

四、思考题

1. 正交变换法与配方法有何区别? 两种方法得到的标准形的形式惟一吗?
2. 设 A 是正定矩阵, A^T , A^{-1} , A^* 是否都是正定矩阵?