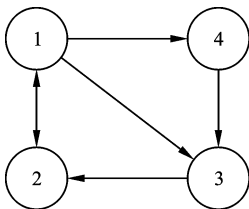


导学 1.1

(1.1 矩阵及其运算)

一、相关问题

四个城市间的单向航线如图所示，



若令

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有 1 条单向航线} \\ 0, & \text{从 } i \text{ 市到 } j \text{ 市没有单向航线} \end{cases}$$

以 a_{ij} 为元素，试用矩阵形式表示图中所示的航线情况.

二、相关知识

1. 简述矩阵定义，有哪些特殊矩阵，举一个能用矩阵描述的实际例子.
2. 矩阵有哪些运算？这些运算的规定中特别要注意什么？
3. 矩阵乘法满足哪些运算规律？不满足哪些规律？

三、练习题

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ，求 A^n .

三、思考题

1. $AB = BA$ 吗？
2. $AB = AC \Rightarrow B = C$ ，正确吗？

导学 1.2

(1.2 行列式及其计算)

一、相关问题

行列式的引进是为了方便计数，当线性问题遇到大量的数据时，可以用矩阵和行列式来方便地进行计算。比如有的线性方程组求解，就可以用行列式来计算；在几何中可以用行列式确定通过定点的几何图形的方程等。

二、相关知识

1. 简述行列式的几种定义，说明行列式与方阵的本质差别。
2. 行列式有哪些性质？
3. 行列式按行(列)展开定理有何作用？
4. 行列式计算有哪些常用方法，是否困难？

三、练习题

$$\text{计算 } D_n = \begin{vmatrix} \beta - \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \beta - \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta & \cdots & \cdots & \beta - \alpha \end{vmatrix}.$$

四、思考题

$$\text{求 } n \text{ 阶行列式 } D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \text{ 展开后的正项总数.}$$

导学 1.3

(1.3 方阵的逆)

一、相关问题

逆矩阵在保密通信中的应用：保密通信是新时代一个非常重要的技术，许多科技工作者做了大量的工作，提出了许多有效的保密通信模型，其中基于加密技术的保密通信模型就是其中一种：



发送方采用某种算法将明文数据加密转换成密文数据发送给接受方，接受方则可以采用对应的某种算法将密文数据解密转换成明文数据。一种加密技术是否有效，关键在于密文能否还原成明文。若设 A 为可逆矩阵， B 为明文矩阵， C 为密文矩阵，加密算法为 $C = AB$ 或 $C = BA$ ，解密算法为 $B = A^{-1}C$ 或 $B = CA^{-1}$ ，这就是一种有效的加密技术。

例如：倩倩的朋友给她发来了一封密信，它有一个 3 阶方阵 $\begin{pmatrix} 207 & 210 & 125 \\ 231 & 318 & 135 \\ 244 & 161 & 175 \end{pmatrix}$ ，约定：消息的每一个英文字母用一个整数来表示： $a \rightarrow 1, b \rightarrow 2, c \rightarrow 3, \dots, y \rightarrow 25, z \rightarrow 26$ ，约好的密码

矩阵为 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 9 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ ，试求倩倩的朋友发来的密码内容？

二、相关知识

1. 矩阵可逆的前提与条件是什么？如何求矩阵的逆？
2. 可逆矩阵在参入矩阵运算中是否重要？可逆矩阵有哪些应用？

三、练习题

设 A 为 3 阶方阵，其逆矩阵为 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ，求 A^{-1} 的伴随矩阵 $(A^{-1})^*$ 。

四、思考题

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ，3 阶方阵 B 满足 $A^*BA = 2BA - 9E$ ，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵， E 为单位矩阵，求矩阵 B 。

导学 1.4

(1.4 Cramer 法则)

一、相关问题

如果平面上有两个不同的已知点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 试用行列式确定通过这两点的直线方程.

二、相关知识

1. 将线性方程组写成矩阵形式.
2. Cramer 法则成立的前提是什么? 线性方程组求解在什么情况下 Cramer 法则解决不了问题?

三、练习题

$$\text{求解方程组} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

四、思考题

若 n 次多项式 $f(x) = c_0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ 对于 $n+1$ 个不同的 x 值都等于 0, 证明 $f(x) \equiv 0$.

导学 2.1

(2.1 矩阵的初等变换)

一、相关问题

在解二元及三元线性方程组的过程中，我们通常采用消元法。在消元过程中通常会对方程组做如下三种变换：对调两个方程的位置；将一个方程的两边同乘以一个非零常数；将一个方程两边同乘以某个常数加到另一个方程。分析解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases} \text{ 的过程, 把对方程组所做的变换用其对应的矩阵表示.}$$

二、相关知识

1. 矩阵的初等变换有哪几类？初等变换与矩阵运算有何关系？
2. 行阶梯形、行最简形及矩阵的标准形分别具有什么形式？
3. 矩阵等价的含义是什么？
4. 矩阵的初等变换有哪些应用？

三、练习题

将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & -6 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 用初等行变换化为阶梯形。进一步化为最简形。

四、思考题

1. 一个非零矩阵的行最简形与行阶梯形有什么区别和联系？
2. 矩阵的初等变换与矩阵的乘法之间的联系有什么意义？

导学 2.2

(2.2 矩阵的秩)

一、相关问题

回顾上节中将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & -6 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 化为行阶梯形与行最简形的结果，考察

非零行的行数是否惟一确定？

二、相关知识

1. 简述矩阵秩的定义，矩阵的秩惟一否？
2. 如何计算矩阵的秩？

三、练习题

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & -6 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

四、思考题

1. 矩阵 A 与 B 等价的充要条件是 $R(A) = R(B)$ ，是否正确？
2. A 与 B 行等价的充要条件是 $R(A) = R(B)$ ，是否正确？

导学 2.3

(2.3 向量组及其线性相关性)

一、相关问题

(1) 平面及空间向量的代数表现形式是怎样的？分别由几个参数确定？在实际中，我们会碰到需要更多参数才能解决的问题。如，确定飞机的状态，需要以下 6 个参数：机身的仰角： φ ($-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$)，机翼的转角： ψ ($-\pi < \psi \leq \pi$)，机身的水平转角： θ ($0 \leq \theta < 2\pi$)，飞机重心在空间的位置参数 $P(x, y, z)$ 。为了确定飞机的状态，我们可以引入 6 维向量 $a = (x, y, z, \varphi, \psi, \theta)$ 。更一般地，大家可以列举一些多维向量的例子。

(2) 如何理解平面向量 α_1, α_2 共线，空间向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面。

二、相关知识

1. n 维向量是怎样定义的？怎样表示？
2. 向量组如何定义？向量组与矩阵有怎样的关系？
3. 什么是向量组的线性组合？什么叫向量组线性相关？
4. 如何判定向量组的线性相关性？

三、练习题

判断向量组 $\alpha_1 = (2, 2, 1)$, $\alpha_2 = (2, 1, 0)$, $\alpha_3 = (1, 2, 1)$ 是否线性相关？

四、思考题

1. 线性相关与线性表示这两个概念有什么区别和联系？
2. 矩阵的初等行变换对矩阵的列向量组和行向量组各有什么作用？

导学 2.4

(2.4 向量组的秩)

一、相关问题

矩阵的秩在向量组的线性相关性讨论中起了十分重要的作用. 按向量组与矩阵的对应关系, 就可以把矩阵的最高阶非零子式与含最多个向量的线性无关组对应, 从而将矩阵秩的概念引进向量组.

二、相关知识

1. 简述向量组等价的定义, 等价的向量组具有什么性质?
2. 什么是最大线性无关向量组? 最大无关组有什么性质? 如何求最大无关组?
3. 简述向量组秩的定义. 它与矩阵的秩有何关系?
4. 向量组的秩具有什么性质? 如何求向量组的秩?

三、练习题

求 $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 2, 5)$, $\alpha_3 = (1, 3, 6)$ 的最大线性无关组.

四、思考题

1. 两个矩阵的等价与两个向量组的等价有什么区别和联系?
2. 向量组的最大无关组有什么重要意义?

导学 2.5

(2.5 n 维向量空间)

一、相关问题

我们知道平面上所有的向量相加减或用数乘后还是平面向量，也就是二维向量。同样所有的空间向量相加减或用数乘后还是空间向量，也就是三维向量。那么任意一个同维数向量构成的向量组是否也具有此性质呢？

二、相关知识

1. 简述向量空间的定义。什么是向量空间的基？向量空间的维数如何定义？
2. 向量的内积是如何定义的？具有什么性质？向量的模是怎样定义的？具有什么性质？
3. 什么是正交向量组？什么是向量空间的正交基？如何求？
4. 什么是标准正交基？简述求标准正交基的施密特正交化方法。

三、练习题

设 W 是由 $\alpha_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$, $\alpha_2 = (1 \ 0 \ 1 \ 0)^T$, $\alpha_3 = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$ 所生成的子空间，求 W 的一个标准正交基。

四、思考题

1. 向量组的最大无关组与向量空间的基有什么区别与联系？
2. 向量空间的基有什么重要意义？

导学 3.1

(3.1 线性方程组及其相关概念 3.2 线性方程组解的判别和线性方程组的求解)

一、相关问题

减肥食谱：下表是一减肥食谱中的 3 种食物以及 100 克每种食物成分含有某些营养素的数量.

营养	每 100 克食物所含营养(g)			减肥所要求的 每日营养量
	脱脂牛奶	大豆面粉	乳清	
蛋白质	36	51	13	33
碳水化合物	52	34	74	45
脂肪	0	7	1.1	3

如果用这三种食物作为每天的主要食物，那么它们的用量应各取多少才能全面准确地实现这个营养要求？

二、相关知识

1. 线性方程组及其有关概念，线性方程组有哪些表示形式？线性方程组的初等变换与矩阵的初等变换的关系怎样？
2. 如何判别齐次和非齐次线性方程组的解？
3. 如何求解齐次和非齐次线性方程组？

三、练习题

1. 讨论线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - px_3 + 15x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = t \end{cases}$$

，当 p, t 取何值时，方程组无解？有惟一

解？有无穷多解？在方程组有无穷多解的情况下，求出一般解.

四、思考题

1. 线性方程组的初等变换与矩阵的初等变换的关系怎样？
2. 初等变换在判别线性方程组的解及其求解中有何重要作用？

导学 3.2

(3.2.3 向量组与线性方程组 3.3.1 线性方程组解的结构)

一、相关问题

线性方程组在现实生活中的应用非常广泛的，不仅可以广泛地应用于工程学、计算机科学、物理学、数学、经济学、统计学、力学、信号与信号处理、通信、航空等学科和领域，同时也应用于理工类的后续课程，如电路、理论力学、计算机图形学、信号与系统、数字信号处理、系统动力学、自动控制原理等课程。大家举一些有实际应用的线性方程组。

二、相关知识

1. 齐次和非齐次线性方程组的解有何性质？
2. 何谓齐次线性方程组的解空间和基础解系？

三、练习题

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是下列线性方程组
$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - z = -1 \\ 7x - 2z = -1 \end{cases}$$
 的解，证明向量组 $\alpha_1 - \alpha_2$ 与 $\alpha_1 - \alpha_3$

线性相关。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $b = (a, 1, 1)^T$, 已知 $Ax = b$ 存在 2 个不同解, (1) 求 λ, a ;

(2) 求 $Ax = b$ 的通解。

四、思考题

1. 向量组的线性相关性与线性方程组的解的判别有何内在联系？
2. 非齐次线性方程组解有何特性？非齐次线性方程组和齐次线性方程组的解之间有何关系？

导学 3.3

(3.3.1 线性方程组解的结构(续) 3.3.2 线性方程组的求解方法)

一、相关问题

线性方程组在现实生活中的应用非常广泛的,不仅可以广泛地应用于工程学、计算机科学、物理学、数学、经济学、统计学、力学、信号与信号处理、通信、航空等学科和领域,同时也应用于理工类的后继课程,如电路、理论力学、计算机图形学、信号与系统、数字信号处理、系统动力学、自动控制原理等课程.大家举一些有实际背景的线性方程组,并考虑如何求解.

二、相关知识

1. 利用线性方程组解的结构求解线性方程组?
2. 利用齐次线性方程组的基础解系求解线性方程组?

三、练习题

设 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 且 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求 $Ax = \beta$ 的通解.

四、思考题

1. 在求解线性方程组的通解时,常与教材中给出的答案不一致,这是否可以?
2. 线性方程组 $Ax = 0$, $Ax = b$ 是否有解与秩 $R(A)$, $R(A, b)$ 有何关系?

考虑: 证明方程 $A_{m \times n} X = E_m$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = m$.

导学 4.1

(4.1 矩阵的特征值与特征向量 4.1.1 正交矩阵与正交变换 4.1.2 特征值与特征向量)

一、相关问题

1. 试用矩阵表示平面上的旋转变换, 观察矩阵的列向量组各向量之间的关系.
2. 两个向量 $OA = (a_1, a_2)^T$, $OB = (b_1, b_2)^T$ 经旋转变换后, 讨论变换前后它们的模的变化及它们之间夹角的变化.

二、相关知识

1. 简述正交矩阵、正交变换的定义、性质;
2. 如何判断矩阵是否为正交矩阵;
3. 特征值、特征向量的定义、性质;
4. 如何求特征值、特征向量.

三、练习题

1. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ 是否为正交矩阵?

2. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

3. 设 n 阶方阵 A 的元素全为 1, 则 A 的 n 个特征值是_____.
4. 设 A 为 n 阶方阵, $Ax=0$ 有非零解, 则 A 必有一个特征值为_____.

四、思考题

1. 若 A, B 为 n 阶正交矩阵, 问: A^{-1} , A^* , AB 是否为正交矩阵?
2. 设 λ 为 n 阶方阵 A 的一个特征值,
 - (1) 求 kA , A^m , $aA + bE$ 的特征值 (k, a, b 均为常数, m 为正整数);
 - (2) 当 A 可逆时, 求 A^{-1} , A^* , $aA^{-1} + bA^*$ 的特征值.
3. 设 a, b, c 为实数, 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2c \end{pmatrix}$ 为正交矩阵的条件.

导学 4.2

(4.2.1 相似矩阵与矩阵可对角化的条件 4.2.2 实对称矩阵的对角化)

一、相关问题

在某城市有 15 万具有本科以上学历的人，其中有 1.5 万人是教师，据调查，平均每年有 10% 的人从教师职业转为其他职业，又有 1% 的人从其他职业转为教师职业，试预测 10 年以后这 15 万人中有多少人在从事教师职业.

二、相关知识

1. 简述相似矩阵的定义、性质.
2. 矩阵可对角化的条件是什么?
3. 实对称矩阵的性质.
4. 如何将实对称矩阵对角化.

三、练习题

1. 判定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 能否相似于对角阵，若相似，则求出可逆矩阵 P ，使 $P^{-1}AP$ 是对角阵.

2. 设三阶方阵 A 的特征值为 $-1, 0, 1$ ，则与方阵 $B = A^3 - A + 2E$ 相似的对角矩阵为_____.

3. 已知实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，求一个正交矩阵 P ，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

4. 设三阶实对称矩阵 A 的三个特征值为 $1, 1, -1$ ， A 的对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，求矩阵 A .

四、思考题

1. 若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则它们有相同的特征值. 反过来，若 A 与 B 有相同的特征值，那么(1)它们是否相似？(2)在什么条件下，它们必定相似？
2. 若 n 阶矩阵 A 的秩 $R(A) = r < n$ ，那么(1) $\lambda = 0$ 是不是 A 的 $n - r$ 重特征值？(2)什么情形下， $\lambda = 0$ 一定是 A 的 $n - r$ 重特征值？

导学 4.3

(4.3.1 二次型及其标准形 4.3.2 正定二次型)

一、相关问题

1. 方程 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4yz = 0$ 表示怎样的曲面?
(可变换成曲面的标准方程 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 表示椭圆柱面)
2. 求以下实函数的最大值或最小值:
(1) $f = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz + 4yz$;
($f = (x + 2y - z)^2 + y^2 + 8yz + 4z^2$, 没有最大值和最小值)
(2) $f = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz - 2yz$;
($f = (x + 2y - z)^2 + (y + z)^2 + 3z^2$, 有最小值 0; 没有最大值)

二、相关知识

1. 二次型定义及矩阵表示?
2. 利用正交变换化二次型为标准形?
3. 利用配方法化二次型为标准形?
4. 惯性定理、二次型正定的判定方法.

三、练习题

1. 用矩阵记号表示下列二次型: $f = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 4yz$.
2. 用正交变换法将二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$ 化为标准形.
3. 用配方法将二次型 $f = x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2x_3$ 化为标准形.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$ 是正定的, 求 k 的取值范围.

四、思考题

1. 正交变换法与配方法有何区别? 两种方法得到的标准形的形式惟一吗?
2. 设 A 是正定矩阵, A^T , A^{-1} , A^* 是否都是正定矩阵?