习题 1.6

2. 0.902.　3. 0.328.　4. 0.6.

5. 0.458.

解：设 A_1 表示“甲命中”；A_2 表示“乙命中”；A_3 表示“丙命中”；

由题设知且 A，B，C 想到独立，且 $P(A_1)=0.4$，$P(A_2)=0.5$，$P(A_3)=0.7$

设 B_i 表示“i 人击中飞机”($i=0,1,2,3$)，则

$$P(B_0)=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3})=(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=(1-0.4)(1-0.5)(1-0.7)=0.09$$

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3)\\&=P(A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3})+(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+(\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3)\\&=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)\\&=0.4\times(1-0.5)(1-0.7)+(1-0.4)\times0.5\times(1-0.7)+(1-0.4)(1-0.5)\times0.7\\&=0.36\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B_2)&=P(A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3)\\&=P(A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3})+(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+(\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3)\\&=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)\\&=0.4\times(1-0.5)(1-0.7)+(1-0.4)\times0.5\times(1-0.7)+(1-0.4)(1-0.5)\times0.7\\&=0.41\end{aligned}$$

$$P(B_3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$$

设 A 表示事件“飞机被击落”，则由题设有

$$P(A\mid B_0)=0,\ P(A\mid B_1)=0.2,\ P(A\mid B_2)=0.6,\ P(A\mid B_3)=1$$

由全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)\\&=0.09\times0+0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1=0.458.\end{aligned}$$

6. 0.901.

解：设 A_i 表示“第 i 人贡献正确意见”，则 $P(A_i)=0.7(i=1,2,\cdots,9)$.

又设 m 为作出正确意见的人数，A 表示“作出正确决策”，则

$$\begin{aligned}P(A)&=P(m\geqslant5)=P_9(5)+P_9(6)+P_9(7)+P_9(8)+P_9(9)\\&=C_9^5\cdot(0.7)^5\cdot(0.3)^4+C_9^6\cdot(0.7)^6\cdot(0.3)^3+C_9^7\cdot(0.7)^7\cdot(0.3)^2\\&=C_9^8\cdot(0.7)^8\cdot(0.3)^1+C_9^9\cdot(0.7)^9\\&=126\cdot(0.7)^5\cdot(0.3)^4+84\cdot(0.7)^6\cdot(0.3)^3\\&\quad+36\cdot(0.7)^7\cdot(0.3)^2+9\cdot(0.7)^8\cdot(0.3)^1+(0.7)^9\\&=0.1715+0.2668+0.2668+0.1556+0.0403\\&=0.901.\end{aligned}$$

7. 至少需要进行一次试验.

习题一

一、填空题

1. Ω, $\varnothing$. 2. 0. 3. $\frac{3}{8}$.

二、选择题

1.（A）.

2.（C）.

3.（D）.

三、计算题

1. $\frac{13}{21}$. 2. $\frac{13}{24}$, $\frac{1}{48}$. 3. 0.25.

4. 0.089.

5. 0.8629.

解： 设 H_i 表示"随机取出的三件乐器中有 i 件音色不纯"（$i=0,1,2,3$），A 表示"这批乐器被接收"，则

$$P(H_0)=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3},\ P(H_1)=\frac{C_3^1C_{96}^2}{C_{100}^3},\ P(H_2)=\frac{C_4^2C_{96}^1}{C_{100}^3},\ P(H_2)=\frac{C_4^3}{C_{100}^3},$$

且

$$P(A\mid H_0)=(0.99)^3,\ P(A\mid H_1)=(0.99)^2\times 0.05,\ P(A\mid H_2)=0.99\times(0.05)^2,$$
$$P(A\mid H_3)=(0.05)^3.$$

于是，由全概率公式得：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A\mid H_i)=0.8574+0.0055+0+0=0.8629.$$

6. 0.6.

7. $1-\frac{13}{6^4}$.

解： 设 A 表示"施放 4 枚深水炸弹击沉潜水艇"，依题意击不沉一艘潜水艇只有以下两种互斥情形："4 枚深水炸弹全击不中潜水艇" 记为事件 B，"4 枚深水炸弹中 1 枚击伤潜水艇而另 3 枚击不中潜水艇" 记为事件 C，由于各枚深水炸弹能袭击潜水艇是独立的，故有 $P(B)=\left(\frac{1}{6}\right)$，$P(C)=C_4^1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3$，

又 B，C 互斥，从而

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-[P(B)+P(C)]=1-\left[\left(\frac{1}{6}\right)^4+C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\frac{1}{2}\right]=1-\frac{13}{6^4}.$$

8. **证明**

(1) 因 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$

即 $$\frac{P(AB)}{P(B)}>\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

展开，得

$$P(AB)[1-P(B)]>P(B)[P(A)-P(AB)]$$

即

$$P(AB)-P(B)P(AB)>P(A)P(B)-P(B)P(AB)$$

化简得 $P(AB)>P(A)P(B)$

从而有

$$P(AB)-P(A)P(AB)>P(A)P(B)-P(A)P(AB)$$

即

$$[1-P(A)]P(AB)>P(A)[P(B)-P(AB)]$$

得

$$P(\overline{A})P(AB)>P(A)P(\overline{A}B)$$

即$\dfrac{P(AB)}{P(A)}>\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}$

得证 $P(B|A)>P(B|\overline{A})$.

(2) 证充分性：

由 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$. 可得

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

整理得

$$P(AB)[1-P(B)]=P(B)[P(A)-P(AB)]$$

即 $P(AB)-P(B)P(AB)=P(A)P(B)-P(B)P(AB)$

化简得 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以 A 与 B 独立.

证必要性：因为 A 与 B 独立，所以 A 与 $\overline{B}$ 也独立，从而 $P(A|B)=P(A)=P(A|\overline{B})$.