习题 3.1

1. 不是. 2. 略

3.

X / Y	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$	$\frac{C_3^3C_1^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{C_3^1C_2^1C_1^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}$	$\frac{C_3^1C_2^1C_2^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$	$\frac{C_3^1C_1^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$
2	$C_1^1C_2^2/C_7^4=\frac{1}{35}$	$\frac{C_3^1C_2^2C_1^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}$	$\frac{C_3^1C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$	0

4.

X / Y	0	1	2	3	$P_{\cdot j}$
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$P_{i\cdot}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

5.
$$f_z(z)=\begin{cases}2(1-z), & 0\leqslant z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解：设 X，Y 分别表示两投掷点的坐标，则 (X, Y) 服从二维均匀分布 $U[0, 1; 0, 1]$，其联合密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}1, \ 0\leqslant x\leqslant 1, \ 0\leqslant y\leqslant 1\\ \qquad 0, \ \text{其它}\end{cases}$$

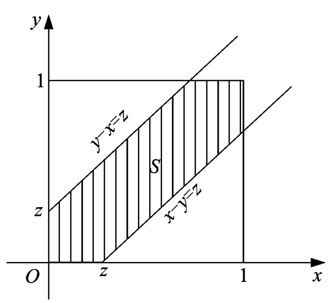
令 $Z=\{X-Y\}$，则 Z 的分布函数为

$$F_z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{|X-Y|\leqslant z\}=\iint\limits_{|x-y|\leqslant 1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 $z<0$ 时，$F_z(z)=0$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，区域 $|x-y|\leqslant z$ 与正方形区域 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 的公共部分如图 3.12 所示，并用 S 表示其面积，则

$$S=1-(1-Z)^2=2z-z^2.$$



于是

$$F_z(z)=\iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2z-z^2.$$

当 $z\geqslant 1$ 时，区域 $|x-y|\leqslant z$ 包含整个正方形区域；

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

于是

$$F_z(Z) = \int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

综上所述，有

$$F_z(z) = \begin{cases} 0, z < 0, \\ 2z - z^2,\ 0 \leqslant z < 1, \\ 1,\ z \geqslant 1, \end{cases}$$

从而，$Z = |X - Y|$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 2(1 - z),\ 0 \leqslant z < 1 \\ \quad 0,\ 其它 \end{cases}$$

6. 设随机变量(X, Y) 在正方形域$|x|+|y| \leqslant \dfrac{a}{\sqrt{2}}$内服从均匀分布.

(1) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}, & (x, y) \in D, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

(2)

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}(\sqrt{2}a + 2x), & -\dfrac{a}{\sqrt{2}} < x < 0, \\ \dfrac{1}{a^2}(\sqrt{2}a - 2x), & 0 < x < \dfrac{a}{\sqrt{2}}, \\ 0, & 其他. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{a^2}(\dfrac{a}{\sqrt{2}} - |x|), & |x| < \dfrac{a}{\sqrt{2}}, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}(\sqrt{2}a + 2y), & -\dfrac{a}{\sqrt{2}} < y < 0, \\ \dfrac{1}{a^2}(\sqrt{2}a - 2y), & 0 < y < \dfrac{a}{\sqrt{2}}, \\ 0, & 其他. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{a^2}(\dfrac{a}{\sqrt{2}} - |y|), & |y| < \dfrac{a}{\sqrt{2}}, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

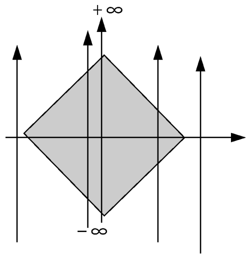
解：(1) 随机变量(X, Y) 在边长为 a 正方形区域 D 内服从均匀分布，故 $S_D = a^2$，得，(X, Y) 的联合概率密度$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2},\ (x, y) \in D \\ 0,\ 其它 \end{cases}$，

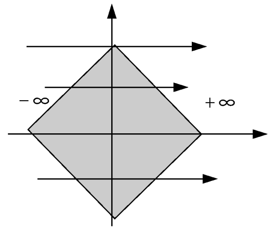
(2) 欲求$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$，由联合概率密度函数的非零定义区域知，该积分是对$y$的积分，则要对 x 分区间讨论，见下左图

①$x \leqslant -\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 或 $x \geqslant \dfrac{a}{\sqrt{2}}$，$f(x, y) = 0$，则 $f_X(x) = 0$

② $-\dfrac{a}{\sqrt{2}} < x < 0$，$f(x, y) \neq 0$，则 $f_X(x) = \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}-x}^{\frac{a}{\sqrt{2}}+x} \dfrac{1}{a^2}\mathrm{d}y = \dfrac{1}{a^2}(\sqrt{2}a + 2x)$；

③$0 < x < \dfrac{a}{\sqrt{2}}$，$f(x, y) \neq 0$，则 $f_X(x) = \int_{x-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}-x} \dfrac{1}{a^2}\mathrm{d}y = \dfrac{1}{a^2}(\sqrt{2}a - 2x)$；





所以，$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}(\sqrt{2}a+2x), & -\dfrac{a}{\sqrt{2}}<x<0\\ \dfrac{1}{a^2}(\sqrt{2}a-2x), & 0<x<\dfrac{a}{\sqrt{2}}\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{a^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}-|x|\right), & |x|<\dfrac{a}{\sqrt{2}}\\ 0, & 其它\end{cases}$

同理，利用对称性，得

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}(\sqrt{2}a+2y), & -\dfrac{a}{\sqrt{2}}<y<0\\ \dfrac{1}{a^2}(\sqrt{2}a-2y), & 0<y<\dfrac{a}{\sqrt{2}}\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{a^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}-|y|\right), & |y|<\dfrac{a}{\sqrt{2}}\\ 0, & 其它\end{cases}$$