习题 3.4

1. Z 的分布律为

Z	2	3	4
P_i	1/4	1/2	1/4

2. Z 的分布律为

Z	0	1
P_i	1/4	3/4

3. $f_Z(z)=\begin{cases} e^{-\frac{z}{3}}(1-e^{-\frac{z}{6}}) & z>0, \\ 0, & z\leqslant 0. \end{cases}$

解：$Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x,$$

由于 $f_X(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时有非零值，$f_Y(z-x)$ 在 $z-x\geqslant 0$ 即 $x\leqslant Z$ 时有非零值，
故 $f_{\underline{X}}(x)f_Y(z-x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant z$ 时有非零值

$$f_Z(z)=\int_0^z \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{3}e^{-\frac{z-x}{3}}\mathrm{d}x = e^{-\frac{z}{3}}\int_0^z \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}\mathrm{d}x$$

$$=e^{-\frac{z}{3}}\left[-e^{-\frac{x}{6}}\right]_0^Z = e^{-\frac{z}{3}}(1-e^{-\frac{z}{6}})$$

当 $z\leqslant 0$ 时，$f_Z(z)=0$，故

$$f_Z(z)=\begin{cases} e^{-\frac{z}{3}}(1-e^{-\frac{z}{6}}), & z>0 \\ 0, & z\leqslant 0 \end{cases}$$

4. 0.000 63

解：设这 4 只电子管寿命为 $X_i(i=1,2,3,4)$，则 $X_i\sim N(160,20^2)$
事件"4 只没有一只寿命小于 180 小时" 可表示为 $\min\{X_1,X_2,X_3,X_4\}\geqslant 180$，
因 $X_i(i=1,2,3,4)$ 相互独立，

则 $P\{\min\{X_1,X_2,X_3,X_4\}\geqslant 180\} = \prod\limits_{i=1}^{4}P\{X_i\geqslant 180\} = \prod\limits_{i=1}^{4}[1-P\{X_i<180\}]$

$=[1-P\{X_1<180\}]^4=\left\{1-\Phi\left(\dfrac{180-160}{20}\right)\right\}^4=\{1-\Phi(1)\}^4=(0.158)^4\approx 0.000\,63$

习题三

1. (1) $a=\frac{1}{3}$;

(2) $F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ \frac{x^3}{3}y+\frac{1}{12}x^2y^2, & 0\leqslant x<1,\ 0\leqslant y<2,\\ \frac{y}{3}+\frac{1}{12}y^2, & x\geqslant 1,\ 0\leqslant y<2,\\ \frac{2x^3}{3}+\frac{1}{3}x^2, & 0\leqslant x<1,\ y\geqslant 2,\\ 1, & x\geqslant 1,\ y\geqslant 2;\end{cases}$

(3) $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{7}{72}$, $P\{X+Y\leqslant 2.3\}=0.738\,9$

解: (1) 因为 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

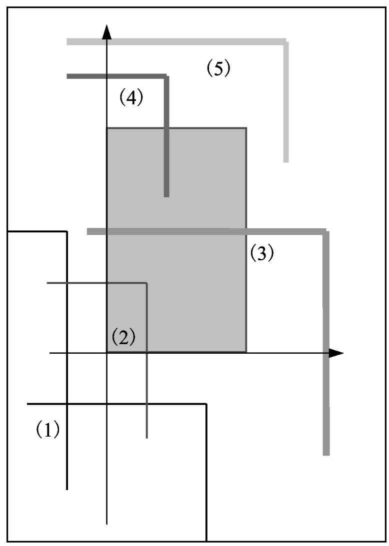
$$=\int_0^1 ax\,\mathrm{d}x\int_0^2(3x+y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 ax\left(6x+\frac{y^2}{2}\Big|_0^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 ax(6x+2)\,\mathrm{d}x=a(2x^3+x^2)\Big|_0^1$$

$$=3a$$

所以, $a=\frac{1}{3}$.



(2) (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)=P\{X\leqslant x,\ Y\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

需要分区域考虑,

①$x<0$ 或 $y<0$, $F(x,y)=P\{X\leqslant x,\ Y\leqslant y\}$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=0,$$

②$0\leqslant x<1,\ 0\leqslant y<2$, $F(x,y)=P\{X\leqslant x,\ Y\leqslant y\}$

$$=\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^y\frac{1}{3}(3u^2+uv)\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\left(u^2y+\frac{u}{3}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{x^3}{3}y+\frac{1}{12}x^2y^2$$

③$x\geqslant 1,\ 0\leqslant y<2$, $F(x,y)=P\{X\leqslant x,\ Y\leqslant y\}$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^y \frac{1}{3}(3u^2+uv)\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{y}{3}+\frac{1}{12}y^2$$

④$0\leqslant x<1,\ y\geqslant 2,\ F(x,y)=P\{X\leqslant x,\ Y\leqslant y\}$

$$=\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^2 \frac{1}{3}(3u^2+uv)\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{2x^3}{3}+\frac{1}{3}x^2$$

⑤$x\geqslant 1,\ y\geqslant 2,\ F(x,y)=P\{X\leqslant x,\ Y\leqslant y\}$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^2 \frac{1}{3}(3u^2+uv)\,\mathrm{d}v$$

$$=1$$

综上，
$$F(x,y)=\begin{cases}0,\ x<0\text{ 或 }y<0\\ \dfrac{x^3}{3}y+\dfrac{1}{12}x^2y^2,\ 0\leqslant x<1,\ 0\leqslant y<2\\ \dfrac{y}{3}+\dfrac{1}{12}y^2,\ x\geqslant 1,\ 0\leqslant y<2\\ \dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{1}{3}x^2,\ 0\leqslant x<1,\ y\geqslant 2\\ 1,\ x\geqslant 1,\ y\geqslant 2\end{cases}$$

(3) $P\{X+Y\leqslant 1\}=\iint\limits_{x+y\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(3x^2+xy)\,\mathrm{d}y=\dfrac{7}{72}$

$P\{X+Y\leqslant 2.3\}=\dfrac{1}{3}\left[\int_0^{1.3}\mathrm{d}y\int_0^1(3x^2+xy)\,\mathrm{d}x+\int_{1.3}^2\mathrm{d}y\int_0^{2.3-y}(3x^2+xy)\,\mathrm{d}x\right]=0.7389$

2. (1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a<x<b,\ c<y<d,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(d-c)}, & c<y<d,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

(2) X 与 Y 是相互独立的.

3. (1) $f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\ln^2 3\times 3^{-x-y}\,\mathrm{d}y=\ln 3\times 3^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\ln^2 3\times 3^{-x-y}\,\mathrm{d}x=\ln 3\times 3^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) X 与 Y 是相互独立的.

4. (1) $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0\leqslant x\leqslant 2\quad 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $\frac{9}{32}$.

解：(1) 由题意得：

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},\ 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0,\ \text{其它}\end{cases},\ f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2},\ 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0,\ \text{其它}\end{cases}$$

又 $\because X$，Y 相互独立

$$\therefore f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4},\ 0\leqslant x\leqslant 2\quad 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0,\ \text{其它}\end{cases}$$

(2) $$P\left\{X+Y\leqslant\frac{3}{2}\right\}=\iint\limits_{x+y\leqslant\frac{3}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x+y\leqslant\frac{3}{2}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{3}{2}-x}\frac{1}{4}\mathrm{d}y=\frac{9}{32}$$

5. (1)

Y \ X	−1	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0

(2) X，Y 不独立.

6. (1) $$f_X(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & x<0\text{或}x\geqslant 2,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2-2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2-2y}, & y<x<2-y,\ 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<x<1,\ y<x,\\ \frac{1}{2-x}, & 1\leqslant x<2,\ 0<y<2-x,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y\mid x=1.5)=\begin{cases}\frac{1}{2-1.5}, & 0<y<2-1.5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}2, & 0<y<0.5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) (X,Y) 不相互独立.

(4) 0.6

$$(5)F_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}0, & x<y,\\ \dfrac{x-y}{2-2y}, & y\leqslant x<2-y,\\ 1, & x\geqslant 2-y.\end{cases}$$

解: (1) 二维随机变量(X,Y)服从区域G上的均匀分布，又$S_G=1$，得

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & 其它\end{cases},$$

$$而f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 1\cdot\mathrm{d}y, & 0\leqslant x<1\\ \int_0^{2-x}1\cdot\mathrm{d}y, & 0\leqslant x<1\\ 0, & x<0或x\geqslant 2\end{cases}$$

$$计算得f_X(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & 0\leqslant x<1\\ 0, & x<0或x\geqslant 2\end{cases},$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}2-2y, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$(2)f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y}, & y<x<2-y,\ 0<y<1,\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x<1,\ y<x\\ \dfrac{1}{2-x}, & x\in(1,2),\ <2-xy\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|1.5)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-1.5}, & 0<y<2-1.5\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}2, & 0<y<0.5\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(3) 由(1)知$f_X(x)\cdot f_Y(y)\neq f(x,y)$，所以$(X,Y)$不相互独立.

$$(4)P\{0.1<Y\leqslant 0.4|X=1.5\}=\int_{0.1}^{0.4}f_{Y|X}(y|1.5)\mathrm{d}y=\int_{0.1}^{0.4}2\mathrm{d}y=0.6$$

$$(5)F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}f_{U|Y}(u|y)\mathrm{d}u=\begin{cases}0, & x<y\\ \int_y^x\dfrac{1}{2-2y}\mathrm{d}u, & y\leqslant x<2-y\\ \int_y^{2-y}\dfrac{1}{2-2y}\mathrm{d}u, & x\geqslant 2-y\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x<y\\ \dfrac{x-y}{2-2y}, & y\leqslant x<2-y\\ 1, & x\geqslant 2-y\end{cases}$$

7. (1) $f(x, y)=\frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{1}{4+x^2}\cdot\frac{1}{9+y^2}$;

(2) $f_x(x)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{4+x^2}, f_y(y)=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{9+y^2}$.

8. (1) 常数 $A=2$; (2) $F(x, y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0, y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ (3) $\frac{1}{3}$.

9. (1) $k=\frac{1}{8}$; (2) $\frac{3}{8}$; (3) $\frac{27}{32}$; (4) $\frac{2}{3}$.

10. (1) $f(x, y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, 0<x<1, y>0,\\ 0, \quad 其他;\end{cases}$; (2) 0.144 5.

11. (1) $C=\frac{3}{\pi R^3}$; (2) $C=\frac{3r^2}{R^2}\left[1-\frac{2r}{3R}\right]$

12. **证**：先求 X, Y 的联合分布函数 $F(x, y)$

$$F(x, y)=\begin{cases}0, x\leqslant -1 或 y\leqslant -1,\\ \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{y}\frac{1+uv}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \ |x|<1, |y|<1,\\ \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{1}\frac{1+uv}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \ |x|<1, |y|>1,\\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y}\frac{1+uv}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \ |x|>1, |y|<1,\\ 1, x\geqslant 1, y\geqslant 1;\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, x\leqslant -1 或 y\leqslant -1\\ \frac{1}{4}(x+1)(y+1)+\frac{1}{16}(x^2+1)(y^2+1), \ |x|<1,\\ \frac{1}{2}(y+1), x>1, |y|>1,\\ 1, x>1, y>1.\end{cases}$$

关于 X 的边缘分布函数为

$$F_X(x)=\lim_{x\to 1}F(x, y)=\begin{cases}0, x<-1,\\ \frac{1}{2}(x+1), -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$$

关于 Y 的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, y<-1,\\ \frac{1}{2}(y+1), -1\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, y>1.\end{cases}$$

因为 $F(X, Y)\neq F_X(x)\cdot F_Y(y)$，所以 X, Y 不独立.

再证 X^2 与 Y^2 独立：设 X^2, Y^2 的联合分布函数为 $F_1(z, t)$，则

$$F_1(z, t)=P(X^2\leqslant z, Y^2\leqslant t)\xlongequal{z>0, t>0}P\{-\sqrt{z}\leqslant x\leqslant\sqrt{z}, -\sqrt{t}<Y\leqslant\sqrt{t}\}$$

$$= F(\sqrt{z}, \sqrt{t}) - F(\sqrt{z}, -\sqrt{t}) - F(-\sqrt{z}, \sqrt{t}) + F(-\sqrt{z}, -\sqrt{t})$$

$$= \begin{cases} 0, z \leqslant 0 \text{ 或 } t \leqslant 0, \\ \sqrt{tz}, 0 < z < 1, 0 < t < 1, \\ \sqrt{t}, z \geqslant 1, 0 < t < 1, \\ \sqrt{z}, 0 < z < 1, t \geqslant 1, \\ 1, z \geqslant 1, t \geqslant 1. \end{cases}$$

关于 $X^2(Y^2)$ 的边缘分布函数分别为

$$F_{X^2}(z) = \lim_{t\to+\infty} F_1(z, t) = \begin{cases} 0, z \leqslant 0, \\ \sqrt{z}, 0 < z < 1, \\ 1, z \geqslant 1. \end{cases}$$

$$F_{Y^2}(t) = \begin{cases} 0, t \leqslant 0, \\ \sqrt{t}, 0 < t < 1, \\ 1, t \geqslant 1. \end{cases}$$

因为 $F_1(z, t) = F_{X^2}(z) \cdot F_{Y^2}(t)$，所以 X^2 与 Y^2 独立.

13. $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1 - e^{-z} - ze^{-z}, & z \geqslant 0. \end{cases}$

解： $F(z) = P\{Z \leqslant z\} = P\{X + 2Y \leqslant z\} = \iint\limits_{x+2y\leqslant z} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

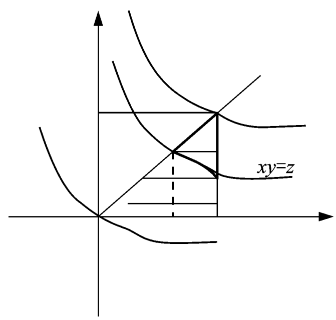
当 $z \leqslant 0$ 时，$F(z) = 0.$

当 $z > 0$ 时，$F(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)}\mathrm{d}y = \int_0^z (e^{-x} - e^{-z})\mathrm{d}x = 1 - e^{-z} - ze^{-z}.$

所以 $Z = X + 2Y$ 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1 - e^{-z} - ze^{-z}, & z \geqslant 0. \end{cases}$

14. (1) $f_Z(z) = \begin{cases} -\ln z, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(2) $f_Z(z) = \begin{cases} 1, 0 < z < 1, \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$



解： G 图示，其面积为 $1/2$，则 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) $Z = XY$，用分布函数法先求分布函数 $F_Z(z)$，再求其概率密度，

$(X, Y) \in G \Rightarrow 0 < z = xy < 1$

$$F_Z(z) = P\{Z \leqslant z\} = P\{XY \leqslant z\} = \begin{cases} 2\iint\limits_{xy\leqslant z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, 0 < z < 1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases}2\left(1-\int_{\sqrt{z}}^{1}\mathrm{d}x\int_{\frac{z}{x}}^{x}\mathrm{d}y\right),\ 0<z<1\\0,\ 其它\end{cases}=\begin{cases}1+z-z\ln z,\ 0<z<1\\0,\ 其它\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}-\ln z,\ 0<z<1\\0,\ 其它\end{cases}$$

（2）$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,\ xz)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1 2x\mathrm{d}x,\ 0<z<1\\0,\ 其它\end{cases}=\begin{cases}1,\ 0<z<1\\0,\ 其它\end{cases}$

15. $\frac{5}{7}$.

解：$F(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+2Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+2y\leqslant z}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

当 $z\leqslant 0$ 时，$F(z)=0$.

当 $z>0$ 时，$F(z)=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{\frac{z-x}{2}}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}y=\int_0^z(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-z})\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-z}-z\mathrm{e}^{-z}.$

所以 $Z=X+2Y$ 的分布函数　$F(x)=\begin{cases}0, & z<0,\\1-\mathrm{e}^{-z}-z\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}$

16. （1）

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

（2）$\frac{1}{3}$.

17. （1）$\frac{3}{4}$；（2）$\frac{3}{4}$.

18. （1）$\mathrm{C}_n^m p^m(1-p)^{n-m}$，$0\leqslant m\leqslant n$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

（2）$\mathrm{C}_n^m p^m(1-p)^{n-m}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{n!}\lambda^n$，$0\leqslant m\leqslant n$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

19.

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2z^2}, & z\geqslant 1,\\\frac{1}{2}, & 0<z<1,\\0, & 其他.\end{cases}$$

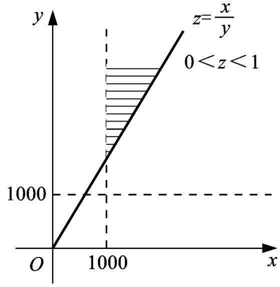
解：如图 Z 的分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\frac{X}{Y}\leqslant z\}$

（1）当 $z \leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$

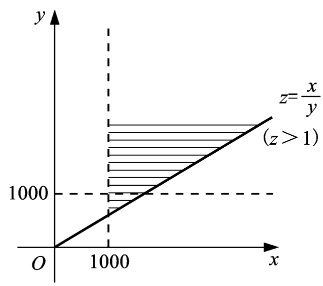
（2）当 $0<z<1$ 时，$\left(\text{这时当 } x=1000 \text{ 时，} y=\frac{1000}{z}\right)$（如图 a）

$$F_Z(z)=\iint\limits_{y\geqslant\frac{x}{z}}\frac{10^6}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{10^3}{z}}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{10^3}^{yz}\frac{10^6}{x^2y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{10^3}{2}}^{+\infty}\left(\frac{10^3}{y^2}-\frac{10^6}{zy^3}\right)\mathrm{d}y=\frac{z}{2}$$



(a)



(b)

（3）当 $z \geqslant 1$ 时，（这时当 $y=10^3$ 时，$x=10^3z$）（如图 b）

$$F_Z(z)=\iint\limits_{y\geqslant\frac{x}{z}}\frac{10^6}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{10^3}{z}}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{10^3}^{yz}\frac{10^6}{x^2y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{10^3}{2}}^{+\infty}\left(\frac{10^3}{y^2}-\frac{10^6}{zy^3}\right)\mathrm{d}y=\frac{z}{2}$$

即
$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2z}, & z\geqslant 1,\\ \frac{z}{2}, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故
$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2z^2}, & z\geqslant 1,\\ \frac{1}{2}, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

20. （1）0. 2；　$\frac{1}{3}$.

（2）

$V=\max(X, Y)$	0	1	2	3	4	5
P	0	0. 04	0. 16	0. 28	0. 24	0. 28

(3)

$U = \min(X, Y)$	0	1	2	3
P	0.28	0.30	0.25	0.17

(4)

$W = X + Y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05