习题 4.1

1. $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, 4.

2. 4.125.

解：X 的可能取值为 3，4，5.

若以 3 场结束比赛，或 A 全胜，或 B 全胜，此时概率为 $p^3+q^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$，即 $P(X=3)=\frac{1}{4}$，这里 q 为 B 在每场比赛中获胜的概率，$q=1-p=\frac{1}{2}$.

若以 4 场结束比赛，则或 A 在第 4 场取胜. 或 B 在第 4 场取胜，故 A 胜的概率为 $pC_3^2p^2q=\frac{3}{16}$，同样 B 获胜的概率为 $qC_3^2q^2p=\frac{3}{16}$，$P(X=4)=\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$.

若以 5 场结果比赛，则或 A 在第 5 场取胜或 B 在第 5 场取胜，

$$P\{X=5\}=pC_4^2p^2q^2+qC_4^2q^2p^2=2\times6\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{8}.$$

故 X 的分布律为：

X	3	4	5
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

由此得

$$E(X)=3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}=\frac{38}{8}=4.125(\text{场}).$$

3. 0.4，0.1，0.5.

4. 5.208 96 万元.

5. （1）

X	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

解：(1)X 的可能值为 0，1，2，3. 以 A 表示事件“汽车在第 i 个路口首次遇到红灯”，则 $P(A_i)=P(\overline{A}_i)=\frac{1}{2}$，$i=1,2,3$，且 A_1，A_2，A_3 相互独立.

$$P\{X=0\}=P(A_1)=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=1\}=P(\overline{A}_1\cdot A_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)=\frac{1}{4}.$$

$$P\{X=2\}=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=\frac{1}{8}.$$

$$P\{X=3\}=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=\frac{1}{8}.$$

(2) $E\left(\frac{1}{1+X}\right) = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{67}{96}$.

6. (1) 44; (2) 68.

7. 4.

8. **证明**

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} nP\{X=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{X=n\} \\ &= P\{X=1\} + 2P\{X=2\} + 3P\{X=3\} + \cdots + nP\{X=n\} + \cdots \\ &= P\{X=1\} + P\{X=2\} + P\{X=3\} + \cdots + P\{X=n\} + \cdots \\ &\quad + P\{X=2\} + P\{X=3\} + \cdots + P\{X=n\} + \cdots \\ &\quad + P\{X=3\} + \cdots + P\{X=n\} + \cdots \\ &\quad + \cdots \\ &= P\{X \geqslant 1\} + P\{X \geqslant 2\} + P\{X \geqslant 3\} + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X \geqslant k\} \end{aligned}$$

得证 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X \geqslant k\}$.