习题 4.2

1. 0.301, 0.322.

2. $D(XY)=D(X)D(Y)+D(X)[E(Y)]^2+D(Y)[E(X)]^2$.

3. $E(XY)=0$, $D(X+Y)=\frac{16}{3}$, $D(2X-3Y)=28$.

4. $EY=-\frac{1}{2}(1+\ln 2)$, $D(Y)=\frac{1}{4}\ln^2 2+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}$.

5. $E(X)$ 不存在，$D(X)$ 也不存在.

解： 由于

$$\int_{-A}^{A}|x|\frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{2\pi}\int_0^A\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^A=\frac{1}{\pi}\ln(1+A^2),$$

而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\pi}\ln(1+A^2)=+\infty.$$

由数学期望定义，可知 $E(X)$ 不存在，因而 $D(X)$ 也不存在.

6. $f_T(t)=\begin{cases}25te^{-st}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$ $E(T)=\frac{2}{5}$. $D(T)=\frac{2}{25}$.

7. **证明：** 设事件 A 在一次实验中发生的概率为 p，又设随机变量 $X=\begin{cases}1, & A\text{ 生},\\ 0, & A\text{ 不生}.\end{cases}$ 则

$$P\{X=0\}=1-p,\quad P\{X=1\}=p,$$

则 $E(X)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$，$E(X^2)=0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p=p$

又因为，$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$，得 $D(X)=p-p^2=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，

故 $\max D(X)=\frac{1}{4}$.

证法(二)：随机变量 X 服从 0－1 分布，故 $D(X)=pq\leqslant\left(\frac{p+q}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，则

$\max D(X)=\frac{1}{4}$.