习题 4.3

1. $\mathrm{Cov}(3X-2Y+1, X+4Y-3)=-28$.

2. $\rho_{XY}=-1$.

3. **证**：(1) 由 ρ 的定义知，$p=0$ 当且仅当 $P(AB)-P(A)\cdot P(B)=0$.
而这恰好是两事件 A、B 独立的定义，即 $p=0$ 是 A 和 B 独立的充分必要条件.
(2) 引入随机变量 X 与 Y 为

$$X=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 发生},\\ 0, & \text{若 } \overline{A} \text{ 发生};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若 } B \text{ 发生},\\ 0, & \text{若 } \overline{B} \text{ 发生}.\end{cases}$$

由条件知，X 和 Y 都服从 0 - 1 分布，即

$$X\sim\begin{cases}0, & 1\\ 1-P(A), & P(A)\end{cases}\qquad Y\sim\begin{cases}0, & 1\\ 1-P(B), & P(B)\end{cases}$$

从而有 $E(X)=P(A)$，$E(Y)=P(B)$，

$D(X)=P(A)\cdot P(\overline{A})$，$D(Y)=P(B)\cdot P(\overline{B})$，

$\mathrm{Cov}(X, Y)=P(AB)-P(A)\cdot P(B)$

所以，事件 A 和 B 的相关系数就是随机变量 X 和 Y 的相关数. 于是由二元随机变量相关系数的基本性质可得 $|p|\leqslant 1$.

4. $\rho_{YZ}=\cos a$. 当 $a=0, \pi, 2\pi$ 时，Y, Z 确实线性相关. 当 $a=\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$ 时，Y 与 Z 并不存在线性关系，却也不相互独立.

5. **证**：由题设可知 X 与 Y 的分布律分别为

x_i	1	0
p_i	$P(A)$	$P(\overline{A})$

y_j	1	0
p_j	$P(B)$	$P(\overline{B})$

$Z=XY$ 的分布律为

x_k	1	0
p_k	$P(AB)$	$1-P(AB)$

$E(X)=P(A)$，$E(Y)=P(B)$，$E(Z)=P(AB)$.
由于

$$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D}(X)\sqrt{D}(Y)}=0,$$

因此，$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$，即 $P(AB)=P(A)P(B)$. 可知事件 A 与 B 相互独立，因之

A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 B, $\overline{A}$ 与 B 均相互独立，故有

$$P\{X=1, Y=1\} = P(AB) = P(A)P(B) = P\{X=1\}P\{Y=1\},$$

$$P\{X=1, Y=0\} = P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = P\{X=1\}P\{Y=0),$$

$$P\{X=0, Y=1\} = P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B) = P\{X=0\}P\{Y=1\},$$

$$P\{X=0, Y=0\} = P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = P\{X=0\}P\{Y=0\}.$$

可见，X 与 Y 相互独立.

6. $\rho_{XY} = \dfrac{n-m}{n}$.