习题 4.4

1. $\frac{1}{9}$.

证明： 由 Chebyshev 不等式，对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\varepsilon^2}$$

所以对任意的 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = 0$$

故 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

2. $P\{|X-Y| \geqslant 6\} \leqslant \frac{1}{12}$.　3. 略.　4. 0.9842.　5. 142.

6. chebyshev 不等式：$n \geqslant 250$，中心极限定理：$n = 68$.

解： 设 X 表示投掷一枚均匀硬币 n 次“正面向上”的次数，则

$$X \sim B(n, 0, 5),\ E(X) = np = 0.5n,\ D(X) = np(1-p) = 0.25.$$

(1) $P\left\{0.4 < \frac{X}{n} < 0.6\right\} = P\{0.4n < X < 0.6n\}$

$$\begin{aligned}
&= P\{-0.1n < X - 0.5n < 0.1n\} \\
&= P\{|X - 0.5n| < 0.1n\} \\
&\geqslant 1 - \frac{D(X)}{(0.1n)^2} = 1 - \frac{0.25n}{0.01n^2} = 1 - \frac{25}{n} \geqslant 0.9,
\end{aligned}$$

由此得　$\frac{25}{n} \leqslant 0.1,\ n \geqslant 250.$

(2) $P\left\{0.4 < \frac{X}{n} < 0.6\right\} = P(0.4n < X < 0.6n\}$

$$\begin{aligned}
&= \Phi\left(\frac{0.6n - 0.5n}{\sqrt{0.25n}}\right) - \Phi\left(\frac{0.4n - 0.5n}{\sqrt{0.25n}}\right) \\
&= \Phi(0.2\sqrt{n}) - \Phi(-0.2\sqrt{n}) \\
&= 2\Phi(0.2\sqrt{n}) - 1 \geqslant 0.9,
\end{aligned}$$

由此得　$\Phi(0.2\sqrt{n}) \geqslant 0.95.$

查表得 $0.2\sqrt{n} \geqslant 1.645$，$n \geqslant 67.65$，取 $n = 68$.

习题四

一、填空题

1. 36.

2. $\frac{1}{2}$, 5.

分析：若 X 满足二项分布，则 $D(X)=np(1-p)$，

$\frac{\mathrm{d}D(X)}{\mathrm{d}p}=n(1-p)-np=n(1-2p)=0$，$p=\frac{1}{2}$，

$\frac{\mathrm{d}^2D(X)}{\mathrm{d}p^2}\Big|_{p=\frac{1}{2}}=-2n<0.$

若 $p=\frac{1}{2}$ 是方差最大值点，也是标准差的最大值点，方差最大值为

$$np(1-p)\Big|_{p=\frac{1}{2}}=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25,$$

从面标准差最大值为 $\sqrt{25}=5$.

3. 1.

二、计算题

1. (1) $\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$；(2) $\sqrt{2\pi}$.

2. (1) $\frac{1}{3}$；(2) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

3. (1) $a=0.2$，$b=0.1$，$c=0.1$.

(2) Z 的概率分布为

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

(3) $P\{X=Z\}=0.4$.

4. $E(Y^2)=5$.

解：因为

$$P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

所以 $Y\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$，从而

$$EY=4\cdot\frac{1}{2}=2,\qquad DY=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1.$$

所以 $$EY^2=DY+(EY)^2=1+2^2=5.$$

5. $E(X)=\frac{1}{p}$，$D(X)=\frac{1-p}{p^2}$.

6. $E(Z)=\frac{n^2-1}{3n}a$.

7. (1) Y 的分布列为 $P(Y=k)=C_{100}^{k}(0.6826)^{K}(0.3174)^{100-k}$;

(2) $EY=100\times0.6826=68.26$, $DY=68.26\times0.3174=21.6657$.

8. (1) $E(X)=0$, $D(X)=2$.

(2) $\mathrm{Cov}(X, |X|)=0$, X 与 $|X|$ 不相关;

(3) 随机变量 X 与 $|X|$ 不独立.

9. X 与 Y 不相关不独立.

解：由于

$$E(X)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=0,\ E(Y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta=0.$$

而 $E(XY)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sincos}\ \theta\mathrm{d}\theta=0$. 因此

$$Cov(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,$$

从而 X 与 Y 不相关. 但由于 X 与 Y 满足关系

$$X^2+Y^2=1,$$

所以 X 与 Y 不独立.

10. (1) $X+Y$ 的概率分布.

S	0	1	2	3
$P\{X+Y=S\}$	0.10	0.40	0.35	0.15

(2) 0.25;

(3) $\rho_{XY}=-0.0676$.

11. (1) $E(Z)=\frac{1}{3}$; $D(Z)=3$;

(2) $\rho_{XZ}=0$;

(3) X 与 Z 相互独立.

解：(1) $E(Z)=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{2}\times0=\frac{1}{3}$;

$$D(Z)=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=D\left(\frac{X}{3}\right)+D\left(\frac{Y}{2}\right)+2\mathrm{cov}\left(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\mathrm{cov}(X, Y)$$

$$=\frac{1}{9}\times3^2+\frac{1}{4}\times4^2+\frac{1}{3}\cdot\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}$$

$$=1+4+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times3\times4=3$$

(2) $\rho_{XZ}=\dfrac{\mathrm{cov}(X, Z)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Z)}}=\dfrac{\frac{1}{2}[D(X+Z)-D(X)-D(Z)]}{\sqrt{D(X)\cdot D(Z)}}$

而 $D(X+Z)=D\left(X+\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=D\left(\frac{4}{3}X+\frac{1}{2}Y\right)$

$$=\left(\frac{4}{3}\right)^2 D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\text{cov}(X, Y)$$

$$=\frac{16}{9}\times 3^2+\frac{1}{4}\times 4^2+\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\times 3\times 4=12$$

$$\therefore\ \rho_{XZ}=\frac{\frac{1}{2}(12-3^2-3)}{3\times 3}=0$$

(3) 由于(X, Y)服从二维正态分布，且$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，

因此(X, Z)的联合分布也是二维正态分布，根据$\rho_{XZ}=0$可以确定X与Z相互独立.

12. (1) 常数$a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$, $c=1$;

(2) 方差$D(X)=\frac{2}{3}$.

(3)$E(Y)=\frac{1}{4}(e^2-1)^2$, $D(Y)=\frac{1}{4}e^2(e^2-1)^2$.

13. (1)

X_2 \ X_1	0	1
0	0.1	0.8
1	0.1	0

(2)$P=-\frac{2}{3}$.

14. $\frac{\sigma_2{}^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}X_1+\frac{\sigma_1{}^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}X_2$.

15. $E(X)=\frac{7}{6}$, $E(Y)=\frac{7}{6}$, $\text{Cov}(X, Y)=-\frac{1}{36}$, $\rho_{XY}=-\frac{1}{11}$, $D(X+Y)=\frac{5}{9}$.

16. (1) $f_V(v)=\begin{cases}2e^{-2v}, & v>0\\ 0, & v\leqslant 0\end{cases}$; (2)$E(U+V)=2$.

解：(1) 设V的分布函数为$F_V(v)$，则

$$F_V(v)=P\{V\leqslant v\}=1-P\{V>v\}=1-P\{X>v\}P\{Y>v\}$$

当$v<0$时，$F_V(v)=0$;

当$v\geqslant 0$时，$F_V(v)=1-\int_v^{+\infty}e^{-x}dx\int_v^{+\infty}e^{-x}dx=1-e^{-2v}$

故V的概率密度$f_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases}2e^{-2v}, & v>0\\ 0, & v\leqslant 0\end{cases}$

(2) 解法一：$U=\max\{X, Y\}=\frac{1}{2}[(X+Y)+|X-Y|]$

$$V=\min\{X, Y\}=\frac{1}{2}[(X+Y)-|X-Y|]$$

则 $U+V=X+Y \quad E(U+V)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1+1=2.$

解法二：同理，U 的概率密度 $f_U(u)=F_U'(u)=\begin{cases}2(1-e^{-u})e^{-u}, & u>0\\ 0, & u\leqslant 0\end{cases}$

$$E(U+V)=E(U)+E(V)=\int_0^{+\infty}u2(1-e^{-u})e^{-u}du+\int_0^{+\infty}v2e^{-2v}dv=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2.$$

17. (1)0.894 4；(2)0.137 9.

解：$X_i=\begin{cases}1, 第 i 人治愈,\\ 0, 其他.\end{cases} i=1, 2, \cdots, 100.$

令 $x=\sum_{i=1}^{100}x_1.$

(1)$X-B(100, 0.8)$,

$$P\{\sum_{i=1}^{100}x_1>75\}=1-P(X\leqslant 75\}=1-\Phi\left(\frac{75-100\times 0.8}{\sqrt{100\times 0.8\times 0.2}}\right)$$
$$=1-\Phi(-1.25)=\Phi(1.25)=0.8944.$$

(2)$X\sim B(100, 0.7)$,

$$P\{\sum_{i=1}^{100}x_1>75\}=1-P(X\leqslant 75\}=1-\Phi\left(\frac{75-100\times 0.7}{\sqrt{100\times 0.7\times 0.3}}\right)$$
$$=1-\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{21}}\right)=1-\Phi(1.09)=0.1379.$$

18. $P\{X=k\}=C_{100}^k 0.2^k 0.8^{100-k}$, $k=1, 2, \cdots, 100$;　0.927.

解：(1)X 可看作 100 次重复独立试验中，被盗户数出现的次数，而在每次试验中被盗户出现的概率是 0.2，因此 $X\sim B(100, 0.2)$，故 X 的概率分布是

$$P\{X=k\}=C_{100}^k 0.2^k 0.8^{100-k}, k=1, 2, \cdots, 100.$$

被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率即为事件$\{14\leqslant X\leqslant 30\}$的概率. 由中心极限定理，得

$$P\{14\leqslant X\leqslant 30\}=\Phi\left(\frac{30-100\times 0.2}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}}\right)-\Phi\left(\frac{14-100\times 0.2}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}}\right)$$
$$=\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=0.994-[-9.33]=0.927.$$

19. $n\geqslant 14.$

解：设 X 表示要求使用外线的分机数，则 $X\sim b(200, 0.05)$，设总机处有 n 条外线，则

$$P\{X\leqslant n\}\geqslant 0.9,$$

由 De Moivre - Laplace 定理：$E(X)=np=10$,

$D(X)=np(1-p)=9.5.$ $P(X\leqslant n\}=P\{\frac{X-10}{\sqrt{9.5}}\leqslant\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\approx\Phi\left(\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\right)\geqslant 0.9$ 查表

得$\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\geqslant 1.285 \quad n\geqslant 14.$

20. 0.1814.

21. (1)0.18；(2)443.