习题 6.1

1. $\hat{\mu}=52.84$, $\hat{\sigma}^2=0.1304$.

解： 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，

由矩估计法知 $\hat{\mu}=\overline{X}$, $\hat{\sigma}^2=S_n^2$

所以 μ 的估计值为 $\hat{\mu}=\bar{x}=\dfrac{53.2+52.4+53.3+52.8+52.5}{5}=52.84.$

σ^2 的估计值 $\hat{\sigma}^2=s_n^2=\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2$

$$=\frac{0.1296+0.1936+0.2116+0.0016+0.1156}{5}=0.1304.$$

2. $\hat{\mu}=2809$, $\hat{\sigma}^2=1170.8$.

3. (1) $\hat{\theta}_1=\overline{X}-\sqrt{3}S_n$, $\hat{\theta}_2=\overline{X}+\sqrt{3}S_n$；(2) $\hat{\theta}_1=X_{(1)}$, $\hat{\theta}_2=X_{(n)}$.

解： (1) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $U(\theta_1, \theta_2)$ 的一个样本，

$\because E(X)=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$, $D(X)=\dfrac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}$,

$\therefore \begin{cases}\theta_1+\theta_2=2E(X)\\ \theta_2-\theta_1=2\sqrt{3}\sqrt{D(X)}\end{cases}$,

由矩估计法，得

$$\begin{cases}\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2=2\overline{X}\\ \hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1=2\sqrt{3}\sqrt{\overline{X^2}-\overline{X}^2}=2\sqrt{3}S_n^2\end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases}\hat{\theta}_1=\overline{X}-\sqrt{3}S_n\\ \hat{\theta}_{21}=\overline{X}+\sqrt{3}S_n\end{cases}$$

(2) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $U(\theta_1, \theta_2)$ 的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为对应的样本值

似然函数 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\left(\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}\right)^n$

取对数 $\ln L(x_1, x_2, \cdots, x_n)=-n\ln(\theta_2-\theta_1)$

令 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_1}=0$, $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_2}=0$, 得 $\dfrac{n}{\theta_2-\theta_1}=0$, 方程无解.

由极大似然估计的定义，知要选取适当的 θ_1, θ_2 使得似然函数取得最大值，

所以 θ_2 越小越好，θ_1 越大越好，但 θ_2 是右端点，θ_1 是左端点，故

$\hat{\theta}_1=\min(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x_{(1)}$, $\hat{\theta}_2=\max(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x_{(n)}$,

故 $\hat{\theta}_1=X_{(1)}$, $\hat{\theta}_2=X_{(n)}$.

4. （1）$\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$，（2）$\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

5. $\hat{\theta}=\max\{|X_1|, |X_2|, \cdots, |X_n|\}$.

解： 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $U(-\theta, \theta)$ 的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为对应的样本值

似然函数 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\left(\dfrac{1}{2\theta}\right)^n$

取对数 $\ln L(x_1, x_2, \cdots, x_n)=-n\ln(2\theta)$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=0$，得 $\dfrac{n}{\theta}=0$，方程无解.

由极大似然估计的定义，知要选取适当的 $\theta>0$ 使得似然函数取得最大值，

所以 θ 越小越好，但 θ 是右端点，故 $\hat{\theta}=\max(|X_1|, |X_2|, \cdots, |X_n|)$.