习题 6.4

1. (0.055, 0.174).

解: 次品率 p 是(0-1)分布的参数, $n=100$, $\bar{x}=0.1$, $\alpha=0.05$, $z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$,

则由(0-1)分布参数的区间估计公式,

$\hat{p}_1=\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac})$, $\hat{p}_2=\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac})$,

计算得: $a=n+(z_{\frac{\alpha}{2}})^2=100+1.96^2=103.84$,

$b=-[2n\bar{x}+(z_{\frac{\alpha}{2}})^2]=-[2\times100\times0.1+1.96^2]=-23.8416$,

$c=n\bar{x}^2=1$,

所以 $\hat{p}_1=\frac{1}{2\times103.84}(23.8416-12.3718)=0.055$, $\hat{p}_2=0.174$.

即随求置信区间为: (0.055, 0.174).

2. (0.62, 0.68).

解: 次品率 p 是(0-1)分布的参数, $n=1000$, $\bar{x}=0.65$, $\alpha=0.05$, $z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$,

则由(0-1)分布参数的区间估计公式,

$\hat{p}_1=\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac})$, $\hat{p}_2=\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac})$,

计算得: $a=n+(z_{\frac{\alpha}{2}})2=1000+1.96^2=1003.84$,

$b=-[2n\bar{x}+(z_{\frac{\alpha}{2}})2]=-[2\times1000\times0.65+1.96^2]=-1303.8416$,

$c=n\bar{x}^2=422.5$,

所以 $\hat{p}_1=\frac{1}{2\times1003.84}(1303.8416-59.2732)=0.6199$, $\hat{p}_2=0.6789$.

即随求置信区间为: (0.6199, 0.6789).

3. (0.407, 0.494).

解: 次品率 p 是(0-1)分布的参数, $n=500$, $\bar{x}=0.45$, $\alpha=0.05$, $z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$,

则由(0-1)分布参数的区间估计公式,

$\hat{p}_1=\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac})$, $\hat{p}_2=\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac})$,

计算得: $a=n+(z_{\frac{\alpha}{2}})2=500+1.96^2=503.84$,

$b=-[2n\bar{x}+(z_{\frac{\alpha}{2}})2]=-[2\times500\times0.45+1.96^2]=-453.8416$,

$c=n\bar{x}^2=101.25$,

所以 $\hat{p}_1=\frac{1}{2\times503.84}(453.8416-43.7835)=0.4069$, $\hat{p}_2=0.4938$.

即随求置信区间为: (0.4069, 0.4938).

习题六

1. (1)$\hat{\theta}=\frac{3-\bar{x}}{4}=0.25$. (2)$\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

解:(1)$\because E(X)=0\cdot\theta^2+1\cdot 2\theta(1-\theta)+2\cdot\theta^2+3\cdot(1-2\theta)=3-4\theta$,

由矩估计法知,令 $\bar{X}=3-4\theta$,解得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{3-\bar{X}}{4}$.

矩估计值 $\hat{\theta}=\frac{3-\bar{x}}{4}=0.25$

(2) 建立似然函数 $L=\prod_{i=1}^{8}p_i=(1-2\theta)^4\cdot\theta^2\cdot[2\theta(1-\theta)]^2[\theta^2]^2=(1-2\theta)^4\cdot 4\theta^8\cdot(1-\theta)^2$

取对数 $\ln L=4\ln(1-2\theta)+\ln 4+8\ln\theta+2\ln(1-\theta)$,

令$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{-8}{1-2\theta}+\frac{8}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}=0$,解 $14\theta^2-17\theta+4=0$

$\because 0<\theta<0.5$,得 $\hat{\theta}=0.31921$

2. $\hat{\lambda}=\bar{x}=1$,即平均 1 升水中含有 1 个大肠杆菌使上述结果的概率最大.

解:已知 $P(X=x_i)=\frac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_i!}$

似然函数 $L=\left(\frac{\lambda^0e^{-\lambda}}{0!}\right)^{17}\left(\frac{\lambda^1e^{-\lambda}}{1!}\right)^{20}\left(\frac{\lambda^2e^{-\lambda}}{2!}\right)^{10}\left(\frac{\lambda^3e^{-\lambda}}{3!}\right)^{2}\left(\frac{\lambda^4e^{-\lambda}}{4!}\right)=\frac{\lambda^{50}e^{-50\lambda}}{288}$,

$nL=50\ln\lambda-50\lambda-\ln 288$,

$\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{50}{\lambda}-50=0\Rightarrow\hat{\lambda}=1$,

$\bar{x}=\hat{\lambda}=1$.

即平均 1 升水中含 1 个大肠杆菌,才能使上述情况出现的概率最大.

3. (1)$\hat{\theta}=\frac{2N_1+N_2}{2n}$;(2)$\hat{\theta}=\frac{20+53}{218}=0.335$.

解:(1)$L=(\theta^2)^{N_1}[2\theta(1-\theta)]^{N_2}[(1-\theta)^2]^{N_3}=2^{N_2}\theta^{2N_1+N_2}(1-\theta)^{N_2+2N_3}$,

$\ln L=N_2\ln 2+(2N_1+N_2)\ln\theta+(N_2+2N_3)\ln(1-\theta)$,

$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{2N_1+N_2}{\theta}-\frac{N_2+2N_3}{1-\theta}=0$

解得 $\hat{\theta}=\frac{2N_1+N_2}{2N_1+2N_2+2N_3}=\frac{2N_1+N_2}{2n}$.

(2)$\hat{\theta}=\frac{2N_1+N_2}{2n}=\frac{20+53}{218}=0.335$

4. $\hat{N}=\frac{\bar{X}}{\hat{p}}$, $\hat{p}=1-\frac{S_n^2}{\bar{X}}$.

5. (1) $\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$, (2) $\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$.

6. $\hat{\theta}=\frac{N}{n}$.　　7. 是.

8. **证明:** $\because\ \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$, $E[\chi^2(n-1)]=n-1$,

$\therefore E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=(n-1)\sigma^2$.

$\because\ \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2\sim\chi^2(m-1)$, $E[\chi^2(m-1)]=m-1$,

$\therefore E\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right]=(m-1)\sigma^2$.

$$\begin{aligned}\therefore E(S^2)&=E\left\{\frac{1}{n+m-2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2\right]\right\}\\&=\frac{1}{n+m-2}\left\{E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]+E\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right]\right\}\\&=\sigma^2.\end{aligned}$$

所以 $S^2=\frac{1}{n+m-2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\overline{Y})^2\right]$ 是 σ^2 的无偏估计.

9. $\hat{\lambda}^2=\overline{X}^2-\frac{\overline{X}}{n}$.

10. (1) $C=\frac{1}{2(n-1)}$; (2) $C=\frac{1}{n}$.

11. **证明** $\because X\sim\pi(\lambda)$, $\therefore E(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$.

又 $E(S^2)=D(X)=\lambda$,

$$\begin{aligned}\therefore E[k\overline{X}+(1-k)S^2]&=kE(\overline{X})+(1-k)E(S^2)\\&=k\lambda+(1-k)\lambda\\&=\lambda,\end{aligned}$$

所以对任意的常数 k, 统计量 $k\overline{X}+(1-k)S^2$ 是 λ 的无偏估计.

12. $a=\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}$, $b=\frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}$.

证明:

$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$, $S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$,

$\because E(S_1^2)=E(S_2^2)=\sigma^2$,

$\therefore E[aS_1^2+bS_2^2]=(a+b)\sigma^2=\sigma^2$.

所以, 对于任意 a, b, 只要 $a+b=1$, $Z=aS_1^2+bS_2^2$ 都是 σ^2 的无偏估计.

$\because \dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1)$, $\therefore D\left[\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\right]=2(n_1-1)$, $\therefore D(S_1^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n_1-1}$,

$\because \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1)$, $\therefore D\left[\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\right]=2(n_2-1)$, $\therefore D(S_2^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n_2-1}$

$\therefore D[aS_1^2+bS_2^2]=\dfrac{2a^2\sigma^4}{n_1-1}+\dfrac{2b^2\sigma^4}{n_2-1}=\dfrac{2a^2\sigma^4}{n_1-1}+\dfrac{2(1-a)^2\sigma^4}{n_2-1}$,

令$\dfrac{dD[aS_1^2+bS_2^2]}{da}=\dfrac{4a\sigma^4}{n_1-1}-\dfrac{4(1-a)\sigma^4}{n_2-1}=0$,

得 $a=\dfrac{n_1-1}{n_1+n_2-2}$, $b=\dfrac{n_2-1}{n_1+n_2-2}$.

13. (1) $\dfrac{T_1}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2)$, $\dfrac{T_2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n)$;

(2) $C_1=\dfrac{1}{m+n-2}$, $C_2=\dfrac{1}{m+n}$; (3) T_2^* 较优.

14. (1) $\chi^2(2n-1)$; (2) $\left(\dfrac{T}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n-1)}, \dfrac{T}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n-1)}\right)$.

15. $n \geqslant \dfrac{4\sigma_0^2}{L^2} z^2_{\frac{\alpha}{2}}$.　　16. 0.9.

17. (1) $E(X)=e^{\mu+\frac{1}{2}}$;　(2) $(-0.975, 0.975)$;　(3) $(e^{-0.475}, e^{1.475})$.

解: (1) 因为 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$,

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}},$$

且 $X=e^Y$,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^y f_Y(y)\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{y-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{[y-(\mu+1)]^2}{2}}dy$$

$$=e^{\mu+\frac{1}{2}}.$$

(2) 依题意, $n=4$, $\bar{y}=\dfrac{\ln 0.5+\ln 1.25+\ln 0.8+\ln 2}{4}=0$,

$$\sigma=1,\ \alpha=1-0.95=0.05,\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96,$$

所以μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 $\bar{y} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}=\pm\dfrac{1}{2}\cdot 1.96=(-0.98, 0.98)$.

(3) 因为 $E(X)=e^{\mu+\frac{1}{2}}$, μ 的置信度为 0.95 的置信区间是$(-0.98, 0.98)$,

所以 $E(X)$ 的置信度为 0.95 的置信区间是$(e^{-0.98+0.5}, e^{0.98+0.5})=(e^{-0.48}, e^{1.48})$.

18. 18. (0.300 0, 2.113 7).

19. (3.203 3, 3.696 8)(提示:先求出μ 置信上下限).

解：$E(Y)=\int_{\mu}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{18}}dx$

$$=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{3}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{18}}d\frac{(x-\mu)^2}{18}+\int_{\mu}^{+\infty}\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{18}}d\frac{x-\mu}{3\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{3}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{18}}\Big|_{\mu}^{+\infty}+\frac{\mu}{2}=\frac{3}{\sqrt{2\pi}}+\frac{\mu}{2}.$$

μ 的置信度为 0.9 的置信区间是

$$\left(\bar{x}-\frac{3}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{x}+\frac{3}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=(4.013,\ 5.000)$$

所以，$E(Y)$ 的置信度为 0.9 的置信区间是

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2\pi}}+\frac{\underline{\mu}}{2},\ \frac{3}{\sqrt{2\pi}}+\frac{\bar{\mu}}{2}\right)=(3.203,\ 3.697)$$

20. (1)(2.196，2.230)； (2)(0.00017，0.00265).

21. (750.5，849.5).　22. (170.44，173.57).　23. (1 084.74，1 209.26).

24. (30.868，31.252).　25. (92 260，107 740).

26. (1)(66.2，73.4)； (2)(5.0，10.4).　27. (−6.04，−5.96).

28. (−12.96，2.96).　29. (−0.002，0.006).　30. $\bar{\mu}=40\ 527$.

31. $\underline{\mu}=409.88\ \text{kg/cm}^2$，$\bar{\mu}=420.12$.

解：总体方差已知的情况下，μ 的置信度为 0.9 的单侧置信上、下限分别是

$$\bar{\mu}=\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha},\ \underline{\mu}=\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha},$$

已知 $n=25$，$\sigma=20$，$\bar{x}=415$，从而 μ 的置信度为 0.95 的单侧置信上、下限分别是

$$\bar{\mu}=415+\frac{20}{5}\times 1.28=420.12.$$

$$\underline{\mu}=415-\frac{20}{5}\times 1.28=409.88.$$

32. (3.56，4.49).

解：已知 $X\sim\pi(\lambda)$，$\mu=E(X)=\lambda$，$\sigma^2=D(X)=\lambda$，$n=100$，$\bar{x}=4$. 由中心极限定理，

$$\frac{\bar{X}-\lambda}{\frac{\sqrt{\lambda}}{10}}\sim N(0,\ 1)$$

对于给定的置信水平 0.98，有

$$P\left\{\left|\frac{10(\bar{X}-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=0.98$$

由不等式 $\left|\frac{10(\bar{X}-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}$，解出

$$\underline{\lambda} = \frac{200\overline{X} + (z_{0.01})^2 - \sqrt{(z_{0.01})^4 + 400\overline{X}(z_{0.01})^2}}{200} = 3.56,$$

$$\overline{\lambda} = \frac{200\overline{X} + (z_{0.01})^2 + \sqrt{(z_{0.01})^4 + 400\overline{X}(z_{0.01})^2}}{200} = 4.49..$$

故得 λ 的置信水平为 0.98 的置信区间为(3.56, 4.49).