习题 7.4

1. 接受 H_0，认为这颗骰子是均匀、对称.

解：假设　$H_0: P\{X=k\}=\frac{1}{6}$, $k=1, 2, \cdots, 6$.

分 6 组并计算各组的理论频数为 $np_i=60\times\frac{1}{6}=10$，从而得到统计量 χ^2 的值

$$\chi^2=\frac{(8-10)^2}{10}+\frac{(8-10)^2}{10}+\frac{(12-10)^2}{10}+\frac{(11-10)^2}{10}+\frac{(9-10)^2}{10}+\frac{(12-10)^2}{10}=1.8,$$

对于 $\alpha=0.05$，查表得 $\chi^2_\alpha(k-1)=\chi^2_{0.05}(5)=11.071$，拒绝域为 $\chi^2\geqslant 11.071$，χ^2 的值未落入拒绝域，故接受 H_0. 认为这颗骰子是否均匀、对称.

2. $\chi^2=1.459<5.991=\chi^2_{0.05}(2)$，接受 H_0，认为一页的印刷错误个数服从泊松分布.

解：假设　$H_0: X\sim\pi(\lambda)$，即检验假设 $H_0: \hat{p}_i=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}(i=1, 2, \cdots)$.

λ 的极大似然估计为

$$\hat{\lambda}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}n_ix_i=\frac{0\times36+1\times40+2\times19+3\times2+4\times0+5\times2+6\times1}{100}=1.$$

总体 X 的取值 $S=\{0, 1, 2, \cdots, 6\}$.

记 $A_1=\{X=0\}$, $A_2=\{X=1\}$, $A_3=\{X=2\}$, $A_4=\{X=3\}$, $A_5=\{X=4\}$, $A_6=\{X=5\}$

$\hat{p}_i=P\{X=i\}=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}=\frac{e^{-\lambda}}{i!}$, $(i=1, 2, \cdots)$,

于是 $\hat{p}_1=P\{A_1\}=\frac{e^{-1}}{0!}=0.3676$, $\hat{p}_2=P\{A_2\}=\frac{e^{-1}}{1!}=0.3676$,

$\hat{p}_3=P\{A_3\}=\frac{e^{-1}}{2!}=0.1828$, $\hat{p}_4=P\{A_4\}=\frac{e^{-1}}{3!}=0.0613$,

$\hat{p}_5=P\{A_5\}=\frac{e^{-1}}{4!}=0.0153$, $\hat{p}_6=P\{A_6\}=\frac{e^{-1}}{5!}=0.0030$,

$\hat{p}_7=1-\hat{p}_1-\hat{p}_2-\hat{p}_3-\hat{p}_4-\hat{p}_5-\hat{p}_6=0.0024$,

由题意并查表得 $k=7$, $r=1$, $\alpha=0.05$，查表得 $\chi^2_\alpha(k-r-1)=\chi^2_{0.05}(5)=11.071$，拒绝域为

$$\left\{\chi^2=\sum_{i=1}^{7}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}\geqslant 11.071\right\}$$

观测值

$$\chi^2=\frac{(36-36.76)^2}{36.76}+\frac{(40-36.76)^2}{36.76}+\frac{(19-18.28)^2}{18.28}+\frac{(2-6.13)^2}{6.13}+\frac{(0-1.53)^2}{1.53}+\frac{(2-0.3)^2}{0.3}+\frac{(1-0.24)^2}{0.24}$$

$$=0.0157+0.2855+0.0283+2.7825+1.53+9.633+2.406=16.681$$

χ^2 的值落入了拒绝域，拒绝 H_0. 认为一页的印刷错误个数不服从泊松分布.

习题七

1. $t=-1.732>-t_{\alpha}(5)=-2.015$，接受 $H_0: \mu \geq 30$，可以认为这种柴油机符合设计要求；

2. (1) $|t|=2.068<2.1448$，接受 H_0，认为脉搏速度与以前没有显著变化；

$5.629<\chi^2<26.119(\chi^2=20.995)$，接受 H_0，认为脉搏的稳定性已恢复如前，

综上，可以断定这名运动员的身体已恢复到受伤前状态；

3. (1) $(2.110, 2.140)$；

(2) $2.15 \notin (2.110, 2.140)$，所以拒绝 H_0，认为这批零件的平均长度与 $\mu_0=2.15$ 有显著差异；

4. (1) $(-\infty, 2.0398)$；(2) $z=-2.838<-1.645=-z_{0.05}$，所以拒绝 H_0，认为该体院男生的脉搏明显低于一般健康成年男子的脉搏；

5. $|z|=2.387<z_{0.005}=2.575$，未落入拒绝域，接受 H_0，即认为甲、乙两煤矿所采煤的含灰率的平均值无显著差异；

解：按题意，需检验

$$H_0: \mu_1=\mu_2,\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

由于两总体方差已知，采用 Z 检验法，选用统计量

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

由题意 $m=5$，$n=4$，$\sigma_1^2=7.5$，$\sigma_2^2=2.6$，经计算得 $\bar{x}=21.5.\ \bar{y}=18$ 查表得 $z_{0.005}=2.575$，拒绝域为

$$|z| \geqslant 2.575$$

经计算 $|z|=\dfrac{|21.5-18|}{\sqrt{\dfrac{7.5}{5}+\dfrac{2.6}{4}}}=2.387<2.575$，

未落入拒绝域，接受 H_0，即认为甲、乙两煤矿所采煤的含灰率的平均值无显著差异；

6. 拒绝 H_0，认为甲种试验方案的平均苗高明显高于乙种试验方案的平均苗高；

7. 拒绝 H_0，认为甲、乙两地段岩心的磁化率的方差有显著差异；

8. (1) $|z| \geqslant 1.96$；　(2) $\beta=P\{1.08<\overline{X}<8.92\}=0.921$；

设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体 $N(\mu, 4^2)$ 的样本，对假设检验问题 $H_0: \mu=5$，$H_1: \mu \neq 5$

(1) 求拒绝域($\alpha=0.05$)；

(2) 若 $\mu=6$，求上述检验所犯的第二类错误的概率 β.

解：(1) 在总体方差已知的情况下，针对假设检验问题

$$H_0: \mu=\mu_0,\ H_1: \mu \neq \mu_0$$

的拒绝域为 $$|z|=\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geqslant z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96.$$

(2) $\beta=P\{$样本落入接受域$\}$

$$= P\left\{ |z| = \frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}} < 1.96 \right\} = P\left\{ \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \times 1.96 < \overline{X} < \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \times 1.96 \right\}$$

$$= P\left\{ 5 - \frac{4}{\sqrt{4}} \times 1.96 < \overline{X} < 5 + \frac{4}{\sqrt{4}} \times 1.96 \right\}$$

$$= P\{1.08 < \overline{X} < 8.92\} = \Phi\left(\frac{2.92}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-4.92}{2}\right) = 0.9209$$

9. $\beta = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} - z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$；

解：$\beta = P\{$样本落入接受域$\}$

$$= P\left\{ |z| = \frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}} < z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} = P\left\{ \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \times z_{\frac{\alpha}{2}} < \overline{X} < \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \times z_{\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$= P\left\{ \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} - z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + z_{\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} - z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

10. $n \geqslant 24.01$，即样本容量至少为 25；

解：$\alpha = 0.025$ 为犯第一类错误的概率，而在 σ^2 已知时，H_0：$\mu \geqslant 20$ 的拒绝域为

$$\frac{\overline{X} - 20}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant -z_\alpha，即 P\left\{ \frac{\overline{X} - 20}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant -z_\alpha \right\} = \alpha \Rightarrow z_\alpha = 1.96,$$

当真正的 $\mu \leqslant 18$ 时犯第二类错误的概率

$$\beta = P\left\{ \frac{\overline{X} - 20}{\sigma/\sqrt{n}} \geqslant -z_\alpha \right\} = P\left\{ \overline{X} \geqslant 20 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times z_\alpha \right\}$$

$$= P\left\{ \frac{\overline{X} - 18}{\sigma/\sqrt{n}} \geqslant \frac{2}{\sigma/\sqrt{n}} - z_\alpha \right\} \leqslant 0.025$$

$$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma/\sqrt{n}} - z_\alpha\right) \leqslant 0.025$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{2\sqrt{n}}{2.5} - 1.96\right) \geqslant 0.975$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \geqslant \frac{3.92 \times 2.5}{2} = 4.9 \Rightarrow n \geqslant 24.01 \Rightarrow n = 25$$

11. $\alpha = 0.066\,8$，$\beta = 0.066\,8$；

解：$\alpha = P\{\overline{X} > 1.5\} = P\left\{ \frac{\overline{X} - 1}{1/3} > \frac{1.5 - 1}{1/3} \right\} = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668$

$\beta = P\{\overline{X} \leqslant 1.5 |_{\mu=2}\} = P\left\{ \frac{\overline{X} - 2}{1/3} > \frac{1.5 - 2}{1/3} \right\} = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668$

12. $\chi^2 = 1.8393 < \chi^2_{0.05}(3) = 7.815$，接受 H_0；

解：

为了求统计量χ^2的值，将(0，+∞)分为4个小区间(0，100]、(100，200]、(200，300]、(300，+∞)，列表计算得：

区间	n_i	p_i	np_i	$(n_i-np_i)^2$	$(n_i-np_i)^2/n\hat{p}_i$
(0，100]	121	0.3935	118.05	8.7025	0.0737
(100，200]	78	0.2387	71.61	40.8321	0.5702
(200，300]	43	0.1447	43.41	0.1681	0.0039
(300，+∞)	58	0.2231	66.93	79.7449	1.1915
总和	300	1	300	129.4476	1.8393

于是，检验统计量χ^2的值

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}=1.8393$$

再由$\alpha=0.05$，查附表得临界值$\chi^2_{0.95}(3)=7.8147$，由于$\chi^2<\chi^2_{0.95}(3)$，所以，在显著性水平$\alpha=0.05$下接受原假设H_0，即认为该批灯泡寿命服从参数为0.005的指数分布.

13. $\chi^2=1.667<5.991=\chi^2_{0.05}(2)$，接受$H_0$，

解

本题要求在水平$\alpha=0.05$下检验假设

H_0：X服从超几何分布：

$$P\{X=k\}=\binom{5}{k}\binom{3}{3-k}\Big/\binom{8}{3},\ k=0,1,2,3.$$

此处$n=112$. 若H_0为真，则可按所给分布律计算，得如下的概率

$$p_1=P\{X=0\}=\binom{5}{0}\binom{3}{3}\Big/\binom{8}{3}=1/56,$$

$$p_2=P\{X=1\}=\binom{5}{1}\binom{3}{2}\Big/\binom{8}{3}=15/56,$$

$$p_3=P\{X=2\}=\binom{5}{2}\binom{3}{1}\Big/\binom{8}{3}=30/56,$$

$$p_4=P\{X=3\}=\binom{5}{3}\binom{3}{0}\Big/\binom{8}{3}=10/56.$$

计算结果列于表

A_i	f_i	p_i	np_i	$f_i^2/(np_i)$
A_1：$\{X=0\}$ A_2：$\{X=1\}$	1 31 }	1/56 15/56	3 30 } 32	32
A_3：$\{X=2\}$	55	30/56	60	50.4167
A_4：$\{X=3\}$	25	10/56	20	31.25

$$\sum=113.6667.$$

因此$\chi^2 = 113.667 - 112 = 1.6667$. 因 $\alpha = 0.05$, $k = 3$, $r = 0$, 有$\chi_{\alpha}^2(k - r - 1) = \chi_{0.05}^2(2) = 5.991 > 1.667$, 故在水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0, 即认为 X 服从超几何分布：

$$P\{X = k\} = \binom{5}{k}\binom{3}{3-k}\Big/\binom{8}{3}, \ k = 0, 1, 2, 3.$$