

导学 4.1

(4.1 数学期望)

一、相关问题

1. 乒乓球是我们的国球，中国队在这项运动中具有绝对的优势，现就乒乓球比赛的安排提出一个问题：假设韩国队和中国队比赛，赛制有两种，一种是双方各出 3 人，三场两胜制，一种是双方各出 5 人，五场三胜制，哪一种赛制对中国队更有利？

2. 一年中一个家庭万元被盗的概率是 0.01，保险公司开办一年期万元以上家庭财产保险，参加者需要缴纳保险费 100 元，若在一年内，万元以上财产被盗，保险公司赔偿 a ($a > 100$) 元，试问 a 要如何确定，才能使保险公司期望获利？

二、相关知识

1. 连续型随机变量的数学期望如何用离散化的形式加以解释？
2. 试用指数分布、Poisson 分布、二项分布、均匀分布和正态分布中求出的数学期望来解释各分布中的相关参数。
3. 数学期望有哪几条性质？

三、练习题

1. 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作。若一周 5 个工作日里无故障，可获利 10 万元；发生一次故障仍可获利 5 万元，发生两次故障所获利润为零；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元，求一周内期望利润是多少？

2. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 2, \\ cx + b, & 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

已知 $E(X) = 2$, $P\{1 < X < 3\} = \frac{3}{4}$, 求

(1) a, b, c 的值；

(2) 随机变量 $Y = e^X$ 的数学期望。

3. 一民航送客车载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车，如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以 X 表示停车的次数，求 $E(X)$ 。（设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）

四、思考题

1. 为什么在数学期望的定义中要求级数绝对收敛而不是条件收敛？
2. 是不是所有的随机变量的数学期望都存在？如果不存在，举出一个例子。