

导学 4.2

(4.2 方差和矩)

一、相关问题

1. 某人有一笔资金，可投入 3 个项目：房产 X 、地产 Y 和商业 Z ，其收益和市场状态有关，若把未来市场划分为好、中、差 3 个等级，其发生的概率分别为 $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.7$, $p_3 = 0.1$ ，根据市场调研的情况可知不同等级状态下各种投资的年收益(万元)，见下表，请问：该投资者如何投资好？

表 1 各种投资年收益分布表

	好 $p_1 = 0.2$	中 $p_2 = 0.7$	差 $p_3 = 0.1$
房产	11	3	-3
地产	6	4	-1
商业	10	2	-2

2. 比较甲乙两人的射击技术，已知两人每次击中环数

$$X \sim \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix},$$

问哪一个人的技术比较好？

二、相关知识

1. 原点矩和中心矩有怎样的关系？
2. 方差刻画的是随机变量在其中心位置的散布程度，试用正态分布求出的方差解释正态分布的相关参数.
3. “随机变量和的期望等于期望的和”和“随机变量和的方差等于方差的和”，这两条性质各有什么条件？

三、练习题

1. 设随机变量 X 的数学期望为 $E(X)$ ，方差为 $D(X)$ ($D(X) > 0$)，引入新的随机变量 $X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ ， X^* 称为标准化的随机变量. 验证 $E(X^*) = 0$, $D(X^*) = 1$.
2. 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D: \{(x, y) | 0 < x < 1, |y| < x\}$ 内服从均匀分布，求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z = 2X + 1$ 的方差 $D(Z)$.
3. 设随机变量 X 服从 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上的均匀分布，令函数

$$y = g(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

求 $Y = g(X)$ 的数学期望和方差.

四、思考题

1. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ 成立的充要条件是 X 和 Y 相互独立，这个结论对吗？
2. 设随机变量 X 的取值区间为 (a, b) ，求证 $D(X) \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.