

导学 4.3

(4.3 协方差、相关系数与协方差矩阵)

一、相关问题

为了分散风险，投资者在金融市场上一般都不会只购买一种资产，如果资产选择得当，资产之间会提供一种套期保值的机会。我们可以用协方差和相关系数的概念来量化资产的套期保值。协方差是测量两个风险资产收益的相互影响的方向与程度，试问协方差与相关系数反映了两种资产怎样的关系？

二、相关知识

1. 试写出随机变量 X 与 Y 按相关性优先的关系图。
2. 协方差有哪些性质？

三、练习题

1. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 X 和 Y 相互独立, 求 $Z_1 = \alpha X + \beta Y$ 和 $Z_2 = \alpha X - \beta Y$ 的相关系数. (其中 α, β 为不为零的常数)

2. 已知二维随机变量 (X, Y) 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, 试求 $Z_1 = X - 2Y$ 和 $Z_2 = 2X - Y$ 的相关系数.

3. 某箱装有 100 件产品, 其中一、二和三等品分别为 80, 10, 10, 现从中随机抽取一件, 记 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{若抽到 } i \text{ 等品, } i = 1, 2, 3. \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

试求:

- (1) 随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布;
- (2) 随机变量 X_1 与 X_2 的相关系数.

四、思考题

1. 若随机变量 X 与 Y 不独立, 则 X 与 Y 相关, 对吗?
2. 相关系数也常称为“线性相关系数”, 这是因为实际上相关系数并不是刻画了 X 与 Y 之间“一般”关系的程度, 而只是“线性”关系的程度. 这种说法的根据之一就在于, 当且仅当 X 与 Y 有严格的线性关系时, 才有相关系数的绝对值达到最大值 1. 请举出例子说明: 即使 X 与 Y 有某种严格的函数关系但非线性关系, 相关系数的绝对值不仅不为 1, 还可以为 0.