导学 4.4

(4.4 大数定律与中心极限定理)

一、相关问题

1. 试用中心极限定理求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}$.

2. 一份考卷由 99 个题目组成，并按由易到难顺序排列. 某学生答对第 1 题的概率是 0.99，答对第 2 题的概率是 0.98，一般地，他答对第 i 题的概率是 $1-i/100$，$i=1,2,\cdots,99$，假如该学生回答各题目是相互独立的，并且要正确回答其中 60 个题目以上(包括 60 个)才算通过考试，试计算该学生通过考试的可能性有多大?

二、相关知识

1. Chebyshev 大数定律和 Bernoulli 大数定律的条件各是什么?
2. Lindberg-Levy 中心极限定理与 De Moivre – Laplace 中心极限定理的条件有什么区别?

三、练习题

1. 用 Chebyshev 不等式确定，掷一均匀硬币时，需掷多少次，才能保证“正面”出现的频率在 0.4 与 0.6 之间的概率不小于 0.9?

2. 若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=0$$

试证明$\{X_n\}$服从大数定律.

3. 某保险公司多年统计资料表明，在索赔户中，被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随机抽查的 100 个索赔户中，因被盗向保险公司索赔的户数，

(1) 写出 X 的概率分布：

(2) 利用中心极限定理，求被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率近似值.

四、思考题

1. 假设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立同分布，$X_i$的概率密度是 $f(x)$. 问 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是否一定满足大数定律?

2. 假设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立同分布，且 X_i的概率密度是 $f(x)$，记 $p=P\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\leqslant x\}$，当 n 充分大时，则 p 能否根据中心极限定理进行计算?