

10.3

Lanchester 方程平方律

基本信息

教学主题	Lanchester 方程平方律	课时安排	15 分钟
所在章节	第 4 章 反力损耗分析方法/第 2 节 Lanchester 方程平方律		

【教学目标】

- (1) 掌握 Lanchester 方程平方律状态方程的基本形式。
- (2) 理解 Lanchester 方程平方律体现的军事原则，能够运用状态方程进行兵力损耗的量化分析。

【教学重点及难点】

- (1) 重点：利用 Lanchester 方程平方律状态方程预测分析战斗结果，实现量化分析兵力损耗以及适当场景下的兵力分配方案。
- (2) 难点：Lanchester 方程平方律体现的军事原则分析。

【教学结构设计】

图 10.23 所示为 Lanchester 方程平方律教学设计框图。

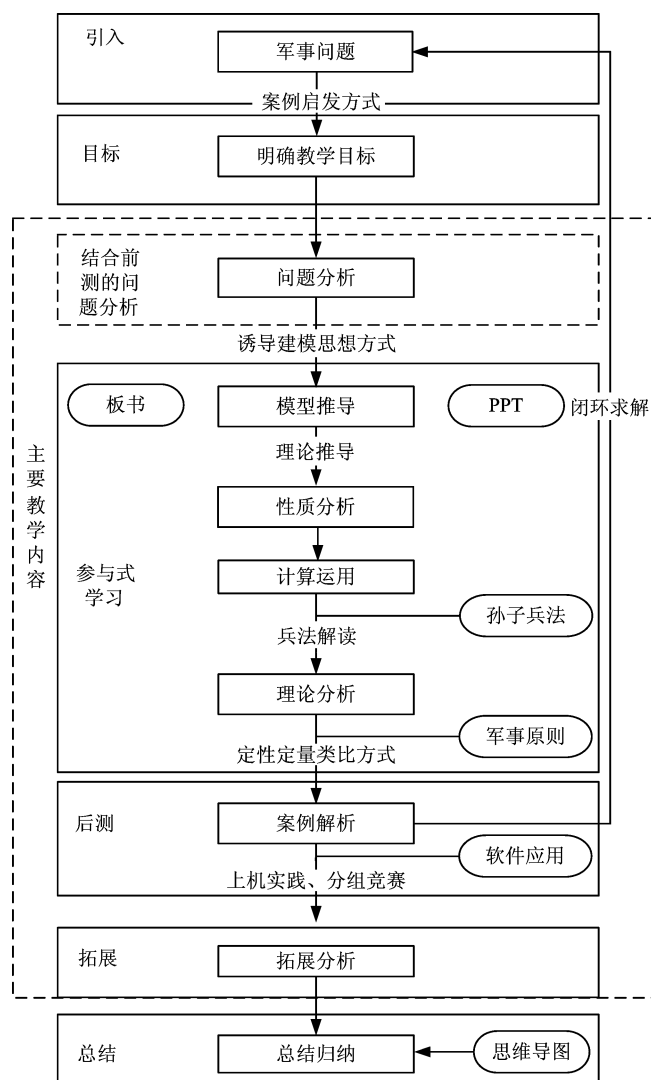


图 10.23 Lanchester 方程平方律教学设计框图

教 学 过 程

◆ 课堂引入(3 分钟)

(1) 案例介绍。

孟良崮战役中,粟裕集中 5 倍于敌军的兵力,对其进攻,并且令 4 个纵队担任阻击任务,有效阻止敌军的增援。

思考:兵力部署背后隐含的军事原则有什么?有什么量化分析方法能够给出支撑?

(2) 引出本节教学目标。

理解 Lanchester 方程计算兵力损耗的思想,掌握 Lanchester 方程平方律的基本形式,学会利用状态方程预测分析战斗结果。

◆ 教学内容讲授(11 分钟)

(1) 回顾 Lanchester 方程平方律模型。

模型形式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by \\ \frac{dy}{dt} = -ax \end{cases}$$

参数含义:

x, y 表示交战中红、蓝双方的兵力数量,称为双方的兵力。

a 为单位时间内红方单位兵力毁伤蓝方的兵力数量。

b 为单位时间内蓝方单位兵力毁伤红方的兵力数量。

a, b 称为毁伤系数。

解:

$$\begin{cases} x = (ce^{-\lambda t} + de^{\lambda t})/\sqrt{a}, \\ y = (ce^{-\lambda t} - de^{\lambda t})/\sqrt{b}, \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} c = \frac{1}{2}(\sqrt{a}x_0 + \sqrt{b}y_0) \\ d = \frac{1}{2}(\sqrt{a}x_0 - \sqrt{b}y_0) \\ \lambda = \sqrt{ab} \end{cases}$$

思考:如何判断双方胜负?

提示:解析解给出了兵力随时间的变化曲线。哪一方的兵力先衰减为 0,哪一方就失败了,还可以计算出此时获胜一方的剩余兵力。但这个结果比较复杂,要推演作战的全过程。

(2) 基于平方律的兵力损耗量化计算。

教学手段

案例启发

教学设计

案例启发:通过引入的实际军事案例,启发学生思考克敌制胜之法以及背后的军事原则,引出本讲的内容。

学情反馈:通过贴近实际的军事问题、日后工作中会遇到的实际问题,让学生以指挥人员的身份参与其中,极大地调动起学生的学习热情,期待本讲内容的展开。另外,利用案例,延伸思考——分析处理这样的问题核心是要做什么?带着问题,有目的地学习。

★课程思政 1:珍惜史料,总结规律

革命先烈用血的代价换来的胜利,要分析其中的制胜机理,总结规律。

教学手段

前测检验

教学设计

前测检验:为了便于学生对马上要学习的内容的理解与掌握,简要回顾一下之前学习的内容。

提问:模型是什么形式?参数含义是什么?解析解的含义是什么?巩固复习,加深理解,并为后续内容展开做好铺垫。
学情反馈:学生在学习了线性律的相关知识之后,已经清楚了描述兵力损耗的方式以及模型的运用的思路;对于平方律模型的形式、内涵,能够较好地理解和掌握。

①状态方程的推导。

两个方程相除,得:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax}{by}$$

积分得:

$$\frac{b}{2}y^2 = \frac{a}{2}(x^2 + C)$$

$t=0$ 时:

$$\frac{b}{2}y_0^2 = \frac{a}{2}(x_0^2 + C)$$

上述两式相减得:

$$by_0^2 - ax_0^2 = by^2 - ax^2$$

②预测作战结果。

情况 1: 蓝军的最初战斗力大于红军的最初战斗力时

$$by_0^2 > ax_0^2$$

结果: 蓝方胜。

蓝方剩余兵力:

$$y = y_e = \sqrt{(by_0^2 - ax_0^2)/b}$$

图 10.24 所示为情况 1 实验结果。

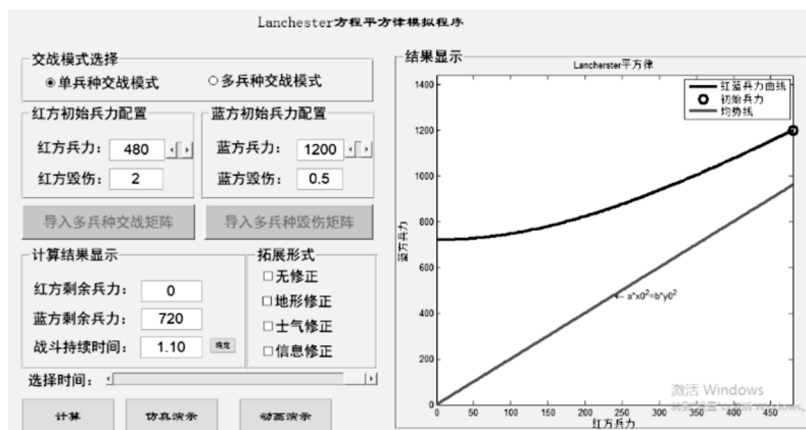


图 10.24 情况 1 实验结果

情况 2: 红军的最初战斗力大于蓝军的最初战斗力时:

$$by_0^2 < ax_0^2$$

结果: 红方胜。

红军的剩余兵力:

$$x = x_e = \sqrt{(ax_0^2 - by_0^2)/a}$$

图 10.25 所示为情况 2 实验结果。

教学手段:

(1) 分析中的互动启发。

(2) 实践操作。

(3) 问题解析。

教学设计:

(1) 分析中的互动启发。

提问: 状态方程的含义? 如何利用状态方程预测战斗结果?

提示: 初始战斗力之差等于交战过程中任意时刻的战斗力之差。初始战斗力大的一方获胜。

(2) 实践操作: 运行下发的 Lanchester 方程兵力损耗分析模块, 直观感受如何利用状态方程预测战斗结果。

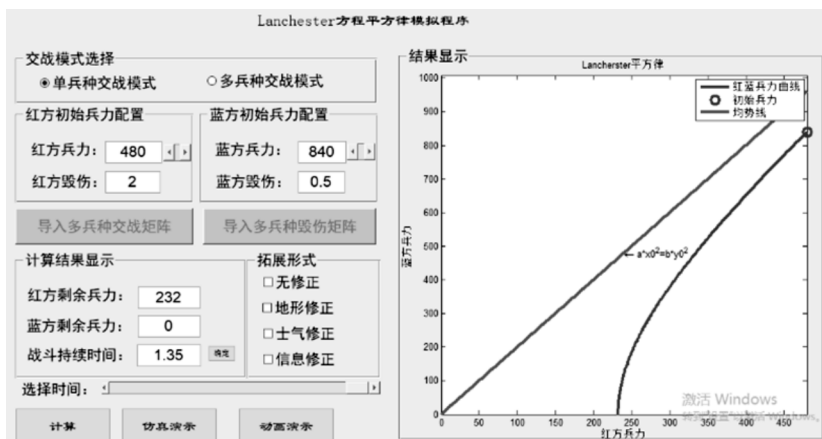


图 10.25 情况 2 实验结果

情况 3: 红军的最初战斗力等于蓝军的最初战斗力时

$$by_0^2 = ax_0^2$$

结果: 同归于尽。

图 10.26 所示为情况 3 实验结果。

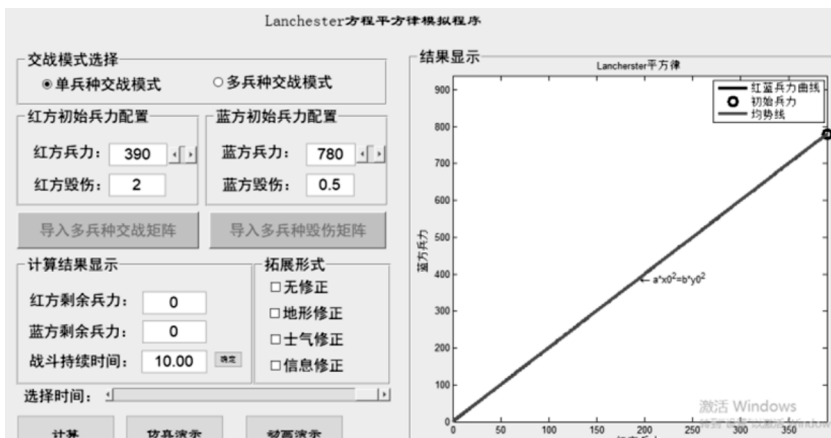


图 10.26 情况 3 实验结果

③ 量化分析计算实践。

设定不同的红蓝初始兵力对比, 计算双方剩余兵力, 直观理解兵力损耗量化分析的内涵(见表 10.1)。

表 10.1 量化分析对比

红蓝双方兵力对比	红方战斗力	蓝方战斗力	胜方剩余兵力
1000 : 100	10^6	10^4	红方 995
1000 : 200	10^6	4×10^4	红方 980
1000 : 500	10^6	25×10^4	红方 866
1000 : 1000	10^6	10^6	0

(3) 问题解析: 针对如何进行兵力分配的问题, 制订兵力分配方案, 以分组竞赛的形式, 让学生利用之前下发的软件模块计算分析, 亲身参与模拟过程, 增强直观感受。

★ 课程思政 2: 文化自信。

孙子兵法在几千年前就给出了兵力运用的定性结论, 这是我们的宝贵财富, 应该继承和发扬。各种古老文化与现代科技遥相呼应, 我们感慨古人的智慧的同时, 更要传承这种文明。

量化分析结果与《孙子兵法》中阐述的思想相符合。

红蓝双方兵力对比	红方战斗力	蓝方战斗力	胜方剩余兵力
1000 : 100	10^6	10^4	红方 995
1000 : 200	10^6	4×10^4	红方 980
1000 : 500	10^6	25×10^4	红方 866
1000 : 1000	10^6	10^6	0



“…用兵之法，十则围之，五则攻之，倍则分之，敌则能战之，少则能逃之，不若则能避之。故小敌之坚，大敌之擒也。”

——《孙子兵法·谋攻》

图 10.27 《孙子兵法》和量化结果对比

④问题解析。

让学生自己制订兵力分配方案，自己动手计算。

方案 1：红蓝双方全部兵力投入作战。

根据状态方程计算结果(见图 10.28)。

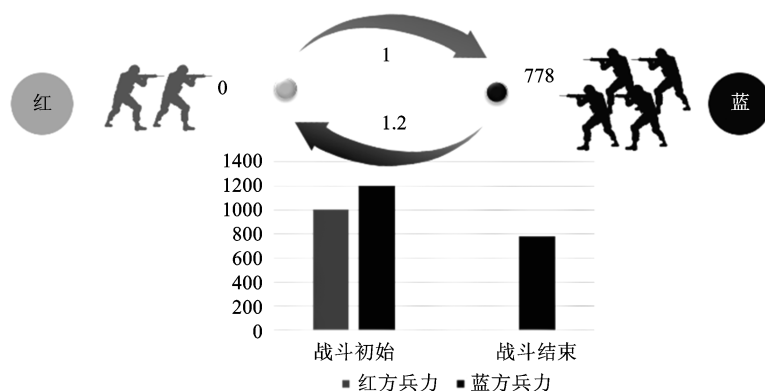


图 10.28 方案 1 实验结果

方案 2：红方利用各种战机，将蓝方兵力诱骗成两个作战集群，分别攻击。

根据状态方程计算结果(见图 10.29)。

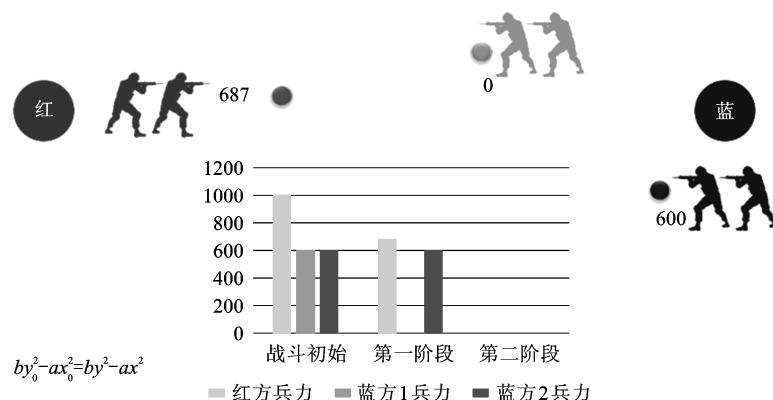


图 10.29 方案 2 实验结果

学情反馈：本节知识容量大，看似简单的微分方程，其中蕴含了大量的哲理和丰富的内涵，需要结合问题讲解加深理解。课堂发现，利用自编的兵力损耗分析模块量化计算，使得模型更具生命力，可以让学生直观地感受到作战行动中的普遍规律，挖掘隐藏的科学内涵，加深对作战模型的领悟。学生对如何将 Lanchester 方程用于处理现代战争问题抱有极大的兴趣，引导出典型的研究思路后，可鼓舞学生开展更为深入地思考和钻研。

课程思政 3：制度自信。

学习过程中要时刻绷紧谋打赢这根弦。即使到了今天，本讲讲解的 Lanchester 方程平方律体现的这些军事原则依然是我们获胜的法宝，在各行各业都有深刻的应用。例如，在 2020 年突发的新冠病毒阻击战中，集中优势兵力体现得淋漓尽致。党中央一声令下，全国各条战线、各个领域紧急动员，驰援武汉，取得了令全世界瞩目的成绩。当全世界还在封闭隔离、人人自危时，中国已经全面复工复产了。集中力量办大事是中国制度优越性的集中体现，这就是我们的制度自信。

思考：总结案例中体现了哪些军事原则？

提示：一是集中优势兵力原则。在作战过程中，当一方的兵力在数量上占有优势时，该方总的战斗力将以平方的形式获得一个更大的增量。因此，武器效能处于劣势的一方，可以通过集中兵力的途径以抵消另一方在武器性能上的优势。

二是各个击破原则：若战斗的一方，能将对方分割成彼此不能相互增援的几部分，然后实施各个击破，那么该方就能以较小代价去换取较大作战效果。

以孟良崮战役作为体现上述军事原则的实例。让学生认识到该实例中有效分割对手、阻止敌方增援、己方集中优势兵力、迅速消灭敌孤立之敌的重要性。

思考：随着战斗方式的变化，Lanchester 方程该如何改进？

课程总结与作业布置

图 10.29 所示为课程总结思维导图。

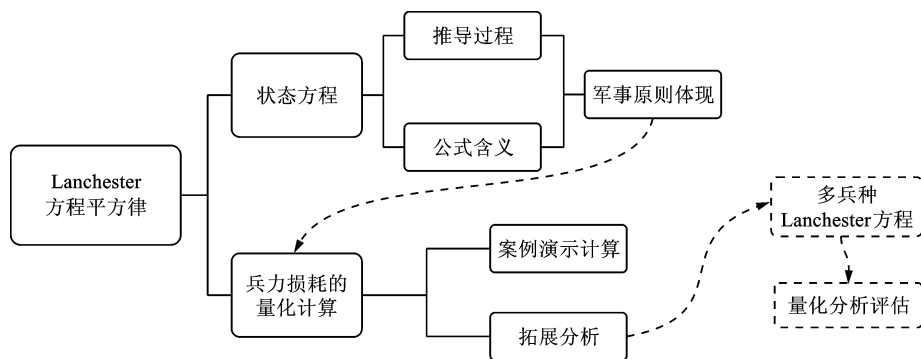


图 10.25 课程总结思维导图

【练习题】

- (1) Lanchester 方程中的毁伤系数是如何确定的？
- (2) 现代作战样式中，一般是多兵种交战场景。多兵种 Lanchester 方程是什么形式？如何预测战斗结局呢？

教 学 反 思

引入军事问题，让学生站在指挥员的角度考虑问题，极大地调动了学生的积极性。用排兵布阵激发学生了对问题的思考，顺利引出本课内容，效果较好。

讲解过程中，首先，根据模型形式推导了状态方程，基于状态方程应用数值计算，与《孙子兵法》遥相呼应。从古典兵法，到现代理论分析，不谋而合的结果，让学生茅塞顿开，加深理解。进而闭环分析引入的案例，让学生以指挥员的身份拟制兵力分配方案。利用编写的兵力损耗仿真模型，对方案进行求解，通过实际操作，提升问题求解能力和模型运用能力。古典兵法、量化模型、军事原则，遥相呼应，学



生对兵力损耗模型的理解进一步升华。

Lanchester 方程平方律形式上比较简单,学生对模型求解、模型特性都很容易理解,对方程体现的军事原则尤为感兴趣。但对于方程的应用和兵力损耗上的分析,理解不够深入,需要结合案例,加强模型仿真的应用,增加直观的感受。目前我们已经编写了兵力损耗分析的计算模块,后续应在此基础上,建设模拟仿真平台,设置更多的计算场景,让学生亲身参与计算并总结分析量化结果中隐含的规律。同时启发学生思考,这些原则也可以用于指导军事之外的其他领域。以此次抗击新冠肺炎疫情为例,进行思政教育,让学生进一步意识到我国制度的优越性,加强我们的制度自信。