10.4 矩阵博弈的纯策略解

基本信息			
教学主题	矩阵博弈的纯策略解	课时安排	15 分钟
所在章节	第 5 章　指挥决策优化方法/第 3 节　矩阵博弈的纯策略解		

【教学目标】

（1）熟悉矩阵博弈纯策略解的含义。
（2）掌握计算矩阵博弈纯策略解的方法。

【教学重点及难点】

（1）重点：矩阵博弈纯策略解的计算方法。
（2）难点：矩阵博弈纯策略解的内涵。

【教学结构设计】

图 10.30 所示为矩阵博弈的纯策略解教学设计框图。

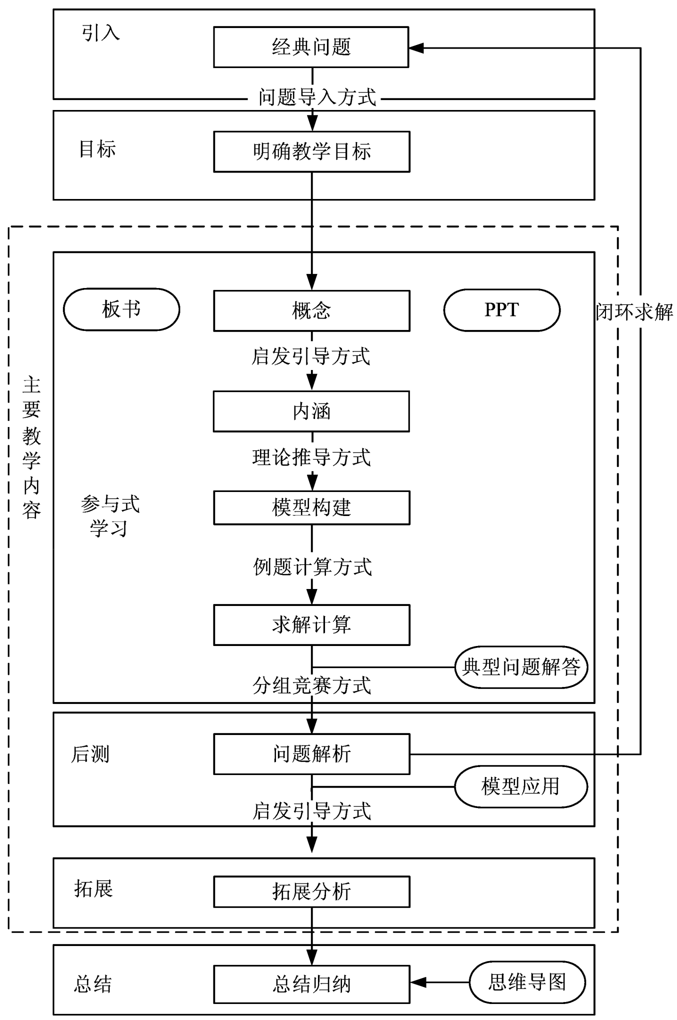


图 10.30 矩阵博弈的纯策略解教学设计框图

教 学 过 程

◈ 课堂引入

(1)问题介绍。

如图 10.31 所示，猪圈里有一头大猪、一头小猪。猪圈西侧有猪食槽，东侧有按钮，按一下按钮就会有 10 个单位的猪食进槽，但谁按按钮就会付出 2 个单位的消耗。若小猪去按，大小猪吃到食物的收益比是 9∶1，同时行动去按按钮，收益比是 7∶3，大猪去按收益比是 6∶4。那么，最终的结果是怎么样的呢？

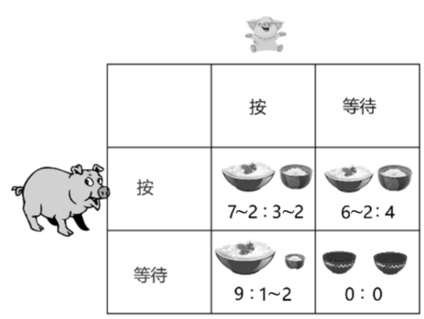


图 10.31　智猪博弈

问大猪、小猪应如何选择才能对自己有利？

思考：该对抗决策问题包含哪些内容？如何找到这个合理的行动方案？

(2)引出本讲教学目标。

理解矩阵博弈纯策略解的含义，掌握计算矩阵博弈纯策略解的方法。

教学手段：问题导入。

教学设计：通过智猪博弈引入案例，引出本节课要讲解的内容，让学生对本节课的内容产生兴趣，进而点明本节课的教学目标。

学情反馈：学生对于经典的博弈问题非常感兴趣，能够较好地调动起学生的学习兴趣，期待学习内容地展开。

◈ 教学内容讲解(12 分钟)

(1)矩阵博弈纯策略解的含义。

博弈行为的基本数学模型。

策略型博弈模型三要素。

①局中人。

在一个博弈行为中，有权决定自己行动方案的博弈参加者，称为局中人。通常用 I 表示局中人集合。如果有 n 个局中人，则 $I=\{1, 2, \cdots, n\}$。

在博弈中总假定每一局中人都是理智的决策者或竞争者。局中人不能冒险，不存在侥幸心理。考虑到对方必然设法使自己的所得利益最少，从各种可能最不利的情形中选择最有利的情形作为决策依据。

②策略集。

一局博弈中，可供局中人选择的一个实际可行的完整的行动方案称为一个策略。参加博弈的每一局中人 i，$i\in I$ 都有自己的策略集 S_i。S_i 是局

教学手段：

(1)经典案例引导方式。

(2)板书绘制方式。

教学设计：

(1)经典案例引导方式：结合学生熟知的经典案例讲解概念。课堂开始提出的智猪博弈问题，让学生自己根据模型中要素的定义，找到上述案例中博弈问题的三要素，从而让学生快速理解、掌握新的概念。

(2)板书绘制方式：板书绘制局中人Ⅰ和局中人Ⅱ博弈模型三要素的基本关系。

中人 i 的所有策略的全体。每个局中人至少应有两个策略,否则就失去了做局中人的资格。

③赢得函数。

在一局博弈中,各局中人选定的策略所形成的策略组称为局势,即 $S=(s_1, s_2, \cdots, s_n)$, $s_i \in S_i$。

当各个局中人选定某个策略之后,在相应的局势下,每个局中人都会有一个赢得值。因此,赢得函数是关于局势的函数,自变量是局势,函数值是对应于这个局势的赢得函数值。将每个局中人的策略均列出来,写出对应的每一个局势下的赢得函数值,即可获得赢得矩阵。

智猪博弈问题中,赢得矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 9 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

综上,随着局中人的集合 N、策略集 $\{S_i\}$ 及赢得函数 $\{u_i\}$ 等三个基本要素的确定,一个策略型博弈 Γ 也就完全确定了,记为 $\Gamma=(N, \{S_i\}, \{u_i\})$。

思考:对于一个博弈问题,它的解应该是什么?

提示:直观的想法就是要找到参与博弈的每个局中人都应该选取什么策略。

对应到这个模型中,即找到每个局中人该选什么策略,而双方采取的这个策略总是对应着矩阵中的一个元素。如果能够找到这个元素就可以反过来找到每个局中人的策略了。因此,核心问题就在于如何从 A 中找到这个解所对应的元素。

(2)矩阵博弈纯策略解的计算方法。

①分析。

局中人 I:选取一个策略之后,从这里先找到最小的值。也就是不管对方出什么策略,选择自己能保证获得的最少收益的策略。然后在所有策略的最少收益中,找一个最大的收益,这就是可以获得的最低赢得。也就是小中取大,$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$。

思考:为什么局中人 I 要小中取大呢?

提示:秉承的原则就是两个局中人都是理性的,不相信对方会对自己好,所以先取最小。但为保证自己的利益,故在自己可选的策略中选择对自己最有利的。

局中人 II 也是完全类似地处理。

定理:矩阵博弈 $G=\{S_1, S_2; A\}$ 在纯策略意义下有解的充要条件是:存在纯局势 $(\alpha_{i*}, \beta_{j*})$ 使得对一切

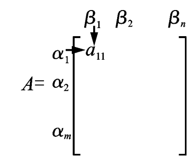
$$i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n,$$

均有 $a_{ij*} \leqslant a_{i*j*} \leqslant a_{i*j}$。

由定理可知,矩阵博弈 G 在纯策略意义下解为 $(\alpha_{i*}, \beta_{j*})$ 且 $V_G=a_{i*j*}$,则称 a_{i*j*} 为赢得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个鞍点。在赢得矩阵中,鞍点为所在行的最小值、所在列的最大值。它背后的理论支撑,即纳什均衡。

②划线法求解。

根据上述矩阵博弈纯策略解的含义,分别把赢得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每列元素中最大者画上划线,每行元素中最小者画下划线(有多个元素同为最大者或



以此,让学生能够有更加直观的印象,加深学生的理解。

★课程思政:化繁为简,抓住本质。

刚刚介绍的策略型博弈模型,其实不难理解,也容易掌握,但却能将复杂的博弈问题很好地刻画出来,为后续的分析求解奠定了基础。实际问题都很复杂,基于量化思维进行研究分析时,一定要学会化繁为简、抓住本质。生活中,学习中,遇到问题时,都需要学会化繁为简,抓住主要矛盾的技巧。

学情反馈:学生初次接触博弈问题会有些难以理解,采用学生熟知经典案例和板书的方式是比较好的手段,让学生能够快速理解、掌握。

教学手段:

(1)启发式。

(2)案例解析式。

教学设计:

(1)启发式:首先启发学生寻求矩阵博弈的解。让学生理解只有二者盈利达到均衡的时候,才是博弈的稳定状态。进而给出描述纯策略解特性的刻画定理。

理论溯源:给出上述纯策略解的深层次的理论依据:纳什均衡。让学生课外拓展学习。

最小者，则都画上划线或下划线）。如果某个元素 a_{i0j0} 同时有上划线和下划线，则局势（α_{i0}，β_{j0}）是 Γ 的 Nash 均衡；否则，Γ 不存在 Nash 均衡。

双矩阵博弈 Γ 的局势（α_{i*}，β_{j*}）为 Nash 均衡，当且仅当：

$$\begin{cases} a_{ij^*} \leqslant a_{i^*j^*}, & i=1, 2, \cdots, m \\ b_{i^*j} \leqslant b_{i^*j^*}, & j=1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

求解双矩阵博弈的纯策略解同样采用 Nash 均衡的划线法。分别把 $\boldsymbol{A}$ 的每列元素中最大者和 $\boldsymbol{B}$ 的每行元素中最大者均画上划线（有多个最大者，则都画上划线）。如果存在 $1 \leqslant i_0 \leqslant m$，$1 \leqslant j_0 \leqslant n$，使得 a_{i0j0} 和 b_{i0j0} 都有上划线，则局势（α_{i0}，β_{j0}）就是 Γ 的 Nash 均衡；否则，Γ 不存在 Nash 均衡。

案例解析：以组间竞赛的形式，让学生利用双矩阵博弈的纯策略解求解方法求解智猪博弈问题。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 5 & \bar{4} \\ \bar{9} & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & \bar{4} \\ -1 & \bar{0} \end{bmatrix}$$

a_{12} 和 b_{12} 均有上划线，故（行动，等待）为 Nash 均衡。

拓展应用：竞争中弱者的生存之道。竞争中的弱者要学会等待，看准时机，以逸待劳。经济学上有一个形象的名字为“搭便车”。其基本含义是像弱猪一样不付成本而坐享他人之利，即所谓的“市场跟随者”。当某个大企业花费数额巨大的投资探索出某种商业模式后，很快就会有一些小厂商模仿跟进，像弱猪一样搭便车，既省去了前期研发投入，又享受了大公司开拓出来的成熟市场。我们常说的“后发优势”便是智猪博弈的强烈体现。弱者也可能成长为强者，同样被无数弱小的猪跟随。

（2）案例解析：利用介绍的求矩阵博弈纯策略解的划线法，让学生自己动手计算求解智猪博弈问题。按照分组，开展组间竞赛。以计算速度和准确性作为评价指标。目的是检验学生对矩阵博弈纯策略解知识的掌握程度。引导其分析背后蕴藏的道理，让学生在掌握计算方法的同时，理解其含义。

学情反馈：本节的内容相对简单，计算方法比较容易掌握，学生也感兴趣。但是潜在的纳什均衡的极大极小思想与意义较难让学生理解。一方面，要加强练习巩固；另一方面，鼓励学生扩展课外阅读。

本课程总结与作业布置（1 分钟）

图 10.32 所示为课程总结思维导图。

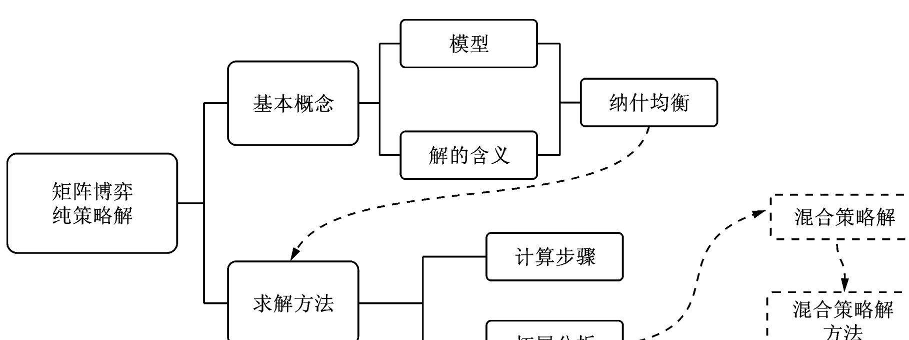


图 10.32　课程总结思维导图

【思考题】

（1）交战双方进攻与防御的兵力部署问题如何决策？

（2）矩阵博弈一定存在 Nash 均衡吗？不存在纯策略解时，该怎么办呢？

教 学 反 思

本节课是学习对抗性决策(博弈)的基础,为了便于学生接受新知识,主要以经典的案例为引入进行讲解。教学过程中发现,结合学生熟知的案例,学生能够很好地掌握基本概念与计算方法。但是其中蕴涵的纳什均衡的极大极小思想与意义学生较难理解。另外,经典案例背后蕴藏的意义,以及在现实中的体现与应用,是学生很感兴趣的方面,也是需要开展深入学习的内容。在后续的学习中要不断巩固加强练习,扩展课外阅读,拓宽知识面与视野。同时,基于本次课"智猪博弈"问题,拓展分析了市场跟随者等经济、社会现象,对学生进行思政教育,倡导学生智慧成长并承担社会责任。