

12.4

一阶线性微分方程

基本信息			
教学主题	一阶线性微分方程	课时安排	1 课时(45 分钟)
所在章节	第 7 章第 4 小节(上册)		

【教学目标】

❖ 知识目标

- (1) 了解一阶线性微分方程的特点。
- (2) 掌握一阶线性微分方程的解法。
- (3) 利用一阶线性微分方程的求解方法解决实际问题。

❖ 能力目标

- (1) 学会根据给定的数据和模型假设, 建立微分方程模型。
- (2) 能够通过类比, 猜想一阶非齐次线性微分方程通解的形式, 并理解常数变易法;
- (3) 能够运用一阶线性微分方程的求解方法去解决实际问题, 提高应用数学的意识与能力。

❖ 情感目标

感受数学模型建立的精妙, 一阶线性微分方程中的很多数学模型可揭示国民经济的快速发展、人口的发展、疾病的传播规律等问题。科学的发展离不开数学的精妙计算, 对历史的探索, 对未来的幻想都离不开数学模型的建立。

【教学重点与难点】

❖ 教学重点

- (1) 一阶线性微分方程的定义。
- (2) 一阶线性微分方程的求解方法。
- (3) 利用一阶线性微分方程的求解方法解决实际问题。

❖ 教学难点

- (1) 一阶线性微分方程模型的建立。
- (2) 一阶线性微分方程的通解形式的猜想。
- (3) 一阶线性微分方程的求解。

【课程思政】

(1) 将目前大家普遍比较关注的“减肥”话题, 引入课堂, 引导学生养成积极健康的生活方式, 切忌暴饮暴食, 注重体育锻炼。

(2)知识延伸,微分方程的模型在很多方面都有重要应用,比如传染病模型,此次新冠疫情数据的准确性会对决策起到非常重要的作用;培养学生的社会责任感。

【教学思路和方法设计】

❖ 教学设计思路

本节课将以探究式、研讨式、启发式教学方法为主线展开教学设计。教学过程遵循:创设情境→问题探究→形成概念→探究深化→练习巩固→课堂小结→课后延伸的思路,充分运用现代教学技术,结合事例、图片、动画代替抽象概念作为极限问题的切入点。让同学感受到所学知识的趣味性,积极参与课堂,以期取得更好的教学效果。

首先通过“减肥”这一话题,引出问题:如何评估是否需要减肥,以及如何制订减肥计划?接着,进行模型构建,得到一阶线性微分方程的数学模型,引出问题:这一类微分方程如何进行求解?最后进入今天的问题探究。整个教学过程遵循从特殊到一般的认知思路,逐步引导学生思考、分析问题,最后解决问题,得出结论。避免毫无缘由地摆出方程类型、硬塞给学生求解方法的教学。

❖ 教学方法

(1)案例教学法

本节课从“减肥”这一热门话题切入,提出问题,构建一阶线性微分方程的数学模型,引出本次课的教学知识点。激发学生的学习兴趣,培养他们的数学思维能力,提高数学素养。

(2)启发引导法

启发学生利用类比猜想的思想方法,引导学生主动进行探究,加深学生对概念的理解,培养学生研究问题的兴趣和能力。

(3)多媒体教学与板书相结合

充分利用现代化教学手段和传统教学手段的优点,使学生明确数学的书写规范,以及掌握不定积分的求解和一阶线性微分方程的求解步骤。

❖ 教学设计过程安排

本课程教学设计过程安排如表 12.6 所示。

表 12.6 教学设计过程安排

教学环节	教师活动	学生活动	设计意图	时间/min
导入新课	创设情境,导入新课:通过目前比较热门的话题——减肥,吸引学生的注意,激发学生的兴趣,导入新课 提出问题:如何评估是否需要减肥,以及如何制订减肥方案?	思考、回答老师所提出的问题	由减肥这一热门话题引出本节课的探究内容,设置问题,激发学生探究兴趣	3

续表12.6

教学环节	教师活动	学生活动	设计意图	时间/min
教学过程	引例探究,建立模型:通过具体实例和模型假设,建立如下模型 $\begin{cases} \frac{d\omega(t)}{dt} = a - b\omega(t) \\ \omega(0) = \omega_0 \end{cases}$ 知识点:一阶线性微分方程的概念 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 问题探究:一阶线性微分方程的求解 第一步:求解 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ 此方程是可分离变量微分方程,学生已经在上一节中学习过,它的通解不难得出 第二步:求解 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 思想方法:类比猜想一阶线性微分方程的通解的形式 $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ ——常数变易法 典型例题:求方程 $y' + y \tan x = \sec x$ 的通解。 求解引例:根据引例中的信息,对该男子的体重进行评估,及如何制订减肥计划?	学生进行小组讨论,得出案例的微分方程的模型 在教师的引导下,探讨总结一阶线性微分方程的求解步骤和思想方法 学生自主进行例题的求解,并公开演示	由实际案例引出本节课的主题——一阶线性微分方程的求解。体现了数学来源于生活的特点激发了学生学习的兴趣 掌握一阶线性微分方程的求解步骤 引导学生用学到的数学知识解决本节课开始的案例,巩固知识	35
课堂小结	对本次课程进行小结: (1)一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ (2)求解步骤: ① $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$; ②常数变易法 (3)通解: $y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$	学生积极参与课堂内容小结,积极思考回答教师的引导性问题	帮助同学梳理知识点,以更好地掌握本节课的内容	3
课后思考	思考1:例题1中的方程 $y' + y \tan x = \sec x$ 还有其他的求解方法吗? 思考2:设一车间体积 $Q = 10800 \text{ m}^3$,开始时空气中含有0.12%的 CO_2。为保证工人健康,用一台风量为 $v = 1500 \text{ m}^3/\text{min}$ 的鼓风机通入新鲜空气,它含有0.04%的 CO_2。通入空气与原有空气混合均匀后以相同的风量排出。问鼓风机开动10分钟后,车间含有 CO_2 的百分比降到多少?	对所学习的知识点展开积极思考,课后查阅文献资料,思考并分析教师的问题	通过让学生课后思考及练习,达到对本节课知识学以致用目的	2

续表12.6

教学环节	教师活动	学生活动	设计意图	时间/min
课后延伸	教师给出部分参考资料，引导学生课后查阅相关文献	根据教师给出部分参考资料，积极查阅相关文献，拓展自己的知识面	使学生养成自主学习的习惯和查阅文献资料的手段，奠定学生科学研究的基础	2

教 学 过 程

◆ 课堂导入

通过目前比较热门的话题——减肥，吸引学生的注意，激发学生的兴趣，导入新课。

世界卫生组织在 20 世纪就宣布，“肥胖已日益成为影响人类健康的一种全球性疾病”。进入 21 世纪，世界卫生组织明确认定肥胖是全球最大的慢性疾病，并与艾滋病、毒药麻醉、酒瘾并列为世界 4 大医学社会问题，是人类健康的大敌。

身体质量指数是 BMI 指数(身体质量指数，简称体质指数)，是目前国际上常用的衡量人体胖瘦程度以及是否健康的一个标准。 $BMI = \text{体重(千克)} \div \text{身高(米)}^2$ (见图 12.33)。

BMI 中国标准 $BMI = \text{kg}/\text{m}^2$

分类	BMI 范围
偏瘦	≤ 18.4
正常	18.5~23.9
过重	24.0~27.9
肥胖	≥ 28.0

图 12.33 BMI 指数

【提出问题】如何评估是否需要减肥，以及如何制订减肥方案？

◆ 问题探究

图 12.34 是某亚洲男子的身体指标，根据他的体重对时间的变化规律，他需要减肥吗？如果需要，应该怎样减肥？需要多少天才能达到他标准的体重？

设计意图：创设情景、引入新课。

(1) 通过简要介绍肥胖的相关知识，让同学们了解肥胖的危害。

(2) 通过目前比较热门的话题——减肥，吸引学生的注意力，学生的学习兴趣，导入新课。(约 2 分钟)

设计意图：建立模型、问题探究。

教师积极引导学生分析问题，建立数学模型。(约 5 分钟)



图 12.34 某亚洲男子的身体指标

【分析】减肥的过程是极其复杂的,因此,需做以下假设:

- (1) 脂肪是提供能量的主要方式。
- (2) 个体差异忽略。
- (3) 脂肪的热量转换系数 $D=104 \text{ kcal/kg}$ 。
- (4) 人体每天摄入的能量提供的热量是一定的。

建立模型:我们将体重的变化过程做出合理的简化。假设人的体重只与吸收和消耗的热量有关,根据能量守恒定律得到:

$$\begin{cases} \frac{d\omega(t)}{dt} = a - b\omega(t) \\ \omega(0) = \omega_0 \end{cases}$$

◆ 一阶线性微分方程

定义:形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的称为一阶线性微分方程。

若 $Q(x) \equiv 0$, 称为一阶齐次线性微分方程。

否则,称为一阶非齐次线性微分方程。

例如:

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = 0 \text{——齐次线性微分方程。}$$

$$\frac{dy}{dx} + y = \cos x \text{——非齐次线性微分方程。}$$

【教师提问】如何求解一阶线性微分方程的通解呢?

【教师引导】可以考虑由特殊到一般的求解思路,即先求解齐次微分方程,再求解非齐次线性微分方程。

$$\text{解: 代入可分离变量方程 } \frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x) dx$$

$$\Rightarrow \ln |y| = -\int P(x) dx + \ln |C|$$

$$\Rightarrow y = C e^{-\int P(x) dx}$$

类比分析探究非齐次线性微分方程的解(见图 12.35):

设计意图:培养学生数学建模的思想,奠定学生解决实际问题的基础。

设计意图:生动讲解,理解概念。

教师生动讲解一阶线性微分方程的概念。(约 2 分钟)

设计意图:启发引导,师生互动。

教师引导学生在求解一阶线性微分方程的通解时,启发从特殊到一般的数学思想。(约 2 分钟)

设计意图:学生动手计算可分离变量微分方程的通解。

发挥学生的主体性,并且为后续的类比过程得出非齐次微分方程的解的形式做好准备。(约 3 分钟)

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ $\Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx$ $\Rightarrow \ln y = -\int P(x)dx + \ln C $ $\Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}$	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ $\Rightarrow \frac{dy}{y} = \left[-P(x) + \frac{Q(x)}{y} \right] dx$ $\Rightarrow \ln y = \int \left[-P(x) + \frac{Q(x)}{y} \right] dx$ $\Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx} e^{\int \frac{Q(x)}{y} dx}$ $y = C(x) e^{-\int P(x)dx}$
---	--

图 12.35 类比分析探究非齐次线性微分方程的解

常数变易法: 设 $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 是原微分方程的解, 将其代入方程得到:

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\text{因此, } C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$$

所以, 方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的通解为:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

◆ 典型例题

【例题 1】求方程 $y' + y \tan x = \sec x$ 的通解。

解法 1: 第一步: 求解可分离变量方程。

$$\frac{dy}{y} = -\tan x dx \Rightarrow y = C \cdot \cos x$$

第二步: 常数变易法。

将 $y = C \cdot \cos x$ 代入原方程, 得到 $C(x) = \tan x + C$ 。

因此, 方程的通解为 $y = \cos x (\tan x + C)$ 。

解法 2: 根据通解的计算式。

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

$$P(x) = \tan x, \quad Q(x) = \sec x$$

因此, 方程的通解为:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] \\ &= e^{-\int \tan x dx} \left[\int \sec x e^{\int \tan x dx} dx + C \right] \\ &= \cos x (\tan x + C) \end{aligned}$$

教学方法: 类比、探究法。

设计意图: 此处进行教材处理, 教材上是直接通过常数变易法给出非齐次微分方程的解的形式, 本次课中引导学生积极通过类比的方法, 先猜想非齐次微分方程的解的形式, 再进行验证, 培养学生的逻辑推理能力。(约 10 分钟)

例题分析: 通过讲解分析典型例题, 使学生掌握计算一阶线性微分方程的步骤和要点。

(约 6 分钟)

◆ 学以致用——求解引例

【分析】由问题探究可知,该男子身高 1.7 m,体重 80 kg,根据 BMI 指标得到:

$$y_0 = \frac{\omega(t_0)}{h^2} = \frac{80}{1.7^2} > 27$$

因此,该男子属于肥胖型。

代入数据到:

$$\begin{cases} \frac{d\omega(t)}{dt} = a - b\omega(t) \\ \omega(0) = \omega_0 \end{cases}$$

得到:

$$\omega(t) = 100 - 20e^{-0.005t}$$

【分析】由模型可知,该男子的体重随时间的变化趋势是单调递增的。当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\omega(t) \rightarrow 100$ kg。若该男子还按照原来的生活方式,体重将会逐渐上升,所以他需要减肥。

方案:(1)适当控制饮食,若摄入热量控制在 2000 kcal/d,则 $\omega(t) = 40 + 40e^{-0.005t}$ 。按照此模型计算,该亚洲男子 86 天可减肥成功。

(2)增加运动量,若摄入热量控制在 76 kcal/d,则 $\omega(t) = 50 + 30e^{-0.01t}$ 。按照此模型计算,该亚洲男子 62 天可减肥成功。

注意:本模型只考虑了新陈代谢和运动的运用,忽略了肌肉、糖类等对人体能量的提供,应多做调查,对模型进行优化。

◆ 课堂小结

总结课堂主要知识点,带领学生检验课堂学习效果。

(1)一阶线性微分方程: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 。

(2)求解步骤:(1) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$; (2)常数变易法。

(3)方程通解: $y = e^{-\int P(x)dx} [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C]$

◆ 课后思考

引导学生积极进行思考。

思考 1: 课后查阅相关资料(附件中提供了部分参考资料,学生可以以此为据进行文献系引),拓展知识面,对一阶线性微分方程的解法深入挖掘。

思考 2: 学以致用,根据课堂中教师解决引例中的数学建模思想,解决通风的问题。

思考 3: 例题 1 求方程 $y' + y \tan x = \sec x$ 的通解还有其他的求解方法吗?

思考 4: 设一车间体积 $Q = 10800 \text{ m}^3$,开始时空气中含有 0.12% 的 CO_2 ,为

设计意图:求解引例。

从理论到实际,用理论知识解决实际问题,明确理论方法的实际意义和价值。(3 分钟)

设计意图:分组讨论。

根据求解得到的结果,分组讨论,帮助该男子制订出合理的减肥计划,让学生踊跃参与课堂。(7 分钟)

设计意图:在总结的过程中,明确本节课的重难点,帮助学生厘清思路,形成知识网络。(2 分钟)

设计意图:从本节课的求解方法入手,提出问题,培养学生独立思考、自主学习的能力,为科学研究奠定基础。(3 分钟)

保证工人健康,用一台风量为 $v = 1500 \text{ m}^3/\text{min}$ 的鼓风机通入新鲜空气,它含有 0.04% 的 CO_2 。通入空气与原有空气混合均匀后以相同的风量排出,问鼓风机开动 10 min ,车间含有 CO_2 的百分比降到多少?

【课后练习】

(1) 求微分方程 $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$ 的通解。

(2) 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$, $y|_{x=\pi} = 1$ 的特解。

(3) 设有一质量为 m 的质点做直线运动。从速度等于零的时刻起,有一个与运动方向一致、大小与时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用于它。此外还受一与速度成正比(比例系数为 k_2)的阻力作用。求质点运动的速度与时间的函数关系。

◆ 板书设计

板书设计如图 12.36 所示。

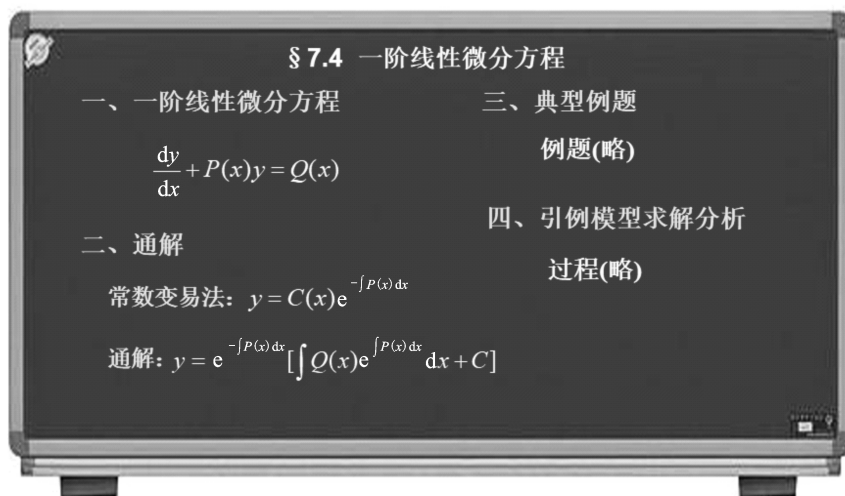


图 12.36 板书设计

教 学 后 记

本次教学从目前大家比较关注的减肥问题导入新课,通过分析建立一阶线性微分方程的数学模型,探讨此类微分方程的求解的方法,得出一类可求解的一阶微分方程——一阶线性微分方程。整个教学过程遵循从特殊到一般的认知思路,逐步引导学生思考、分析问题,最后解决问题,得出结论,避免毫无缘由地摆出方程类型、填鸭式塞给学生求解方法的教学。通过本次教学,让学生学会微分方程的建立、求解和应用,提高发现问题、分析问题和解决问题的能力。让学生更好地体会到数学在解决实际问题上的作用,培养学生学习“高等数学”的兴趣以及学以致用用的研究精神。