

12.5

格林公式及其应用

基本信息			
教学主题	格林公式及其应用	课时安排	1 课时(45 分钟)
所在章节	第 13 章第 3 小节		

【教学目标】

❖ 知识目标

- (1) 理解格林公式及其证明。
- (2) 理解格林公式的意义和格林公式成立的条件。
- (3) 能利用格林公式解决实际问题。

❖ 能力目标

- (1) 通过牛顿-莱布尼茨公式→格林公式的推广过程,培养学生的推理能力。
- (2) 通过格林公式的证明,培养学生知识运用的能力。
- (3) 通过分析 GPS 面积测量仪,培养解决问题的能力。

❖ 情感目标

- (1) 通过牛顿-莱布尼茨公式与格林公式的联系,感受数学的奇妙,以及严密的数学逻辑。
- (2) 通过介绍数学家的故事,让学生体会科学探索的漫长过程,树立终身学习的意识。

【教学重点与难点】

❖ 教学重点

- (1) 格林公式及其证明。
- (2) 格林公式的应用。
- (3) 利用格林公式解决实际问题。

❖ 教学难点

- (1) 格林公式及其推导。
- (2) 格林公式的应用。

【课程思政】

(1) 从牛顿-莱布尼茨公式到格林公式的推广过程,鼓励学生大胆猜想,科学求证,同时在猜想过程中,引导学生透过形式看本质,为格林公式的推广奠定基础。

(2) 通过揭示 GPS 测量仪之谜,让学生体会数学的应用价值,养成运用知识的习惯,提高学生的创新意识。

(3)通过介绍数学家的故事，让学生体会科学探索的漫长过程，树立终身学习的意识。

【教学思路和方法设计】

❖ 教学设计思路

本节课的教学遵循：课程导入→问题探究→概念形成→例题讲解→学以致用→课堂小结→课后思考的教学过程。采用讲授法、提问法、辩证分析法等教学方法和认识事物的方法展开教学。

本节课通过湖泊和梯田的面积测量这一问题，引入课堂。学生在计算面积时可以用定积分和二重积分。教师进行点拨，将学生带入揭秘 GPS 面积测量仪的情境中，营造一个学生感兴趣并激发求知欲的教学氛围。接着，启发学生利用以往学过的知识来探究发现封闭边界曲线与其所围的平面区域之间的关系。在师生共同分析推导后，总结格林公式，进一步说明在一般封闭区域下公式的正确性。启发学生用本次微课所学的格林公式，以及已知知识对 GPS 面积测量仪的数学原理进行研究及讨论。

❖ 教学方法

(1)启发式教学、案例教学法

本节课以一个经典的数学故事切入，提出问题，分析问题，解决问题，同时引出本次课的教学知识点。遵循以教师主导、以学生为主体的教学理念，激发每个学生的学习兴趣，培养他们的数学思维能力，提高数学素养。

(2)研讨式教学

引导学生主动探究常数项级数概念，加深学生对概念的理解，培养学生研究问题的兴趣和能力。

(3)多媒体教学与板书相结合

充分利用现代化教学手段和传统教学手段的优点。格林公式难且抽象，学生很难想象，利用丰富的图片与动画展示，使学生对格林公式的求解过程一目了然；在推导公式的过程中，利用板书详细讲解，加深同学们对问题的理解、掌握及应用。

❖ 教学设计过程安排

本课程教学设计过程安排如表 12.7 所示。

表 12.7 教学设计过程安排

教学环节	教师活动	学生活动	设计意图	时间/min
导入新课	创设情境，导入新课： (1)如何测量湖泊与梯田的面积？ (2)分析定积分和二重积分计算面积的局限性； (3)测量湖泊和梯田的工具——GPS 面积测量仪； (4)提出问题：方便高效的面积测量仪是如何工作的？	体会教师所介绍的素材，并针对问题积极展开思考	通过实际问题的引入，激发学生的求知欲及探索新知识的兴趣	4

续表12.7

教学环节	教师活动	学生活动	设计意图	时间/min
教学过程	(1)利用牛顿-莱布尼茨公式提出猜想,“二重积分是否也可以用某个函数在积分区域边界上的值来表达”,从而引入格林公式,为格林公式的理解和格林公式的证明做铺垫; (2)根据猜想的格林公式的结构,引导学生探究封闭区域边界曲线的方向,进而介绍——单连通区域、复连通区域及其边界曲线的正向的概念,为格林公式及其证明的讲授做准备; (3)格林公式及其证明。结合格林公式结构的猜想,从第二类曲线积分联系出发,推导格林公式; (4)通过证明过程理解格林公式的意义:建立二重积分与其积分区域的边界曲线上的第二类曲线积分之间的关系,为二重积分和曲线积分的计算提供了新的途径; (5)典型例题+解释面积测量仪原理	(1)回顾牛顿-莱布尼茨公式; (2)在教师的引导下猜想格林公式的结构; (3)学生直观观察单连通区域、复连通区域并了解其内涵;理解边界曲线的正向; (4)学生根据教师的板书过程理解格林公式的证明; (5)学生根据教师的引导深刻理解格林公式,为格林公式的应用做好准备; (6)掌握利用格林公式进行计算的步骤;理解面积测量仪的原理	(1)通过揭示牛顿-莱布尼茨公式实质运用猜想、类比的数学方法得出格林公式的结构; (2)介绍单连通区域、复连通区域及其边界曲线的正向的概念。为格林公式及其证明做准备; (3)验证猜想,推导格林公式及其证明; (4)揭示格林公式的意义和注意点,使学生深刻理解格林公式,为格林公式的应用做好准备; (5)前后呼应,使学生掌握格林公式的应用,并培养学生学以致用意识	35
课堂小结	总结本次课的内容:回顾由牛顿莱布尼兹公式推广到格林公式与的过程,并强调它们之间的共性;格林公式的应用 提出猜想:能否将格林公式进行推广到三重积分中去。若能,推广后的情形可能会是什么样的呢?	学生积极参与课堂内容小结;积极思考回答教师引导性问题	帮助同学梳理知识点,以更好地掌握格林公式以及归纳猜想、类比推广的数学方法	3
课后思考	给出一道课后思考题,为下节课的内容做铺垫。计算积分$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$,其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线	学生在课后通过复习课堂内容和查阅资料自主积极或互相交流后求解问题	进一步帮助学生理解和掌握格林公式,培养学生灵活运用现有知识解决问题的能力	3

教 学 过 程

◆ 课堂导入

【引入问题】如何测量湖泊与梯田的面积呢？

【知识回顾】平面图形的面积求解的问题，我们并不陌生，可以用定积分和二重积分进行计算。

$$\text{定积分: } S = \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{二重积分: } S = \iint_D d\sigma.$$

【教师点拨】无论是采用定积分还是二重积分，它们的计算都依赖平面区域的边界曲线的精确数学描述。在实际问题中，边界曲线的精确表达往往比较困难。所以，定积分和二重积分这两个工具在解决湖泊与梯田的面积时，就显得手足无措了。那么，应该如何测量呢？

科学技术的进步，带来了我们对整个世界的不断的探索。GPS 面积测量仪（见图 12.37）的诞生不仅可以应用到工程、科研探索上，还常用于农田、水域、山坡、绿地和森林等的面积测定。因此有时又被俗称为农田面积测量仪、土地面积测量仪，或者简称测亩仪、农田测亩仪。

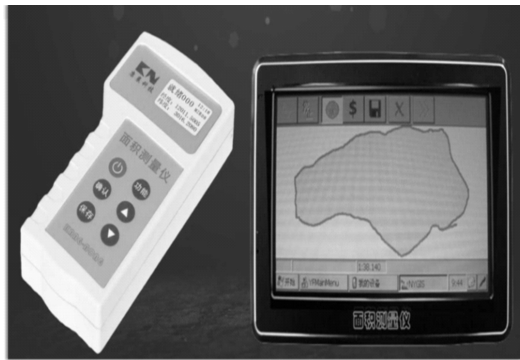


图 12.37 GPS 面积测量仪

【引入问题】方便高效的面积测量仪是如何工作的呢？

带着这个疑问，让我们一起走进今天的课程——格林公式的学习。

【引出思考】在使用 GPS 面积测量仪时，我们看到测量员会拿着测量仪绕着湖泊的边界行走一周。湖泊的面积是否与围成湖泊的边界曲线之间有某种关系呢？

【回顾知识】牛顿-莱布尼茨公式。

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

本质：一元函数在区间上的积分可以用它的一个原函数在区间边界上

创设情景、引入新课。

(1) 提出问题：如何测量湖泊和梯田的面积？

(2) 教师引导学生计算面积的两种方法——定积分和二重积分。

(3) 教师指出用定积分和二重积分计算时的局限性。

(4) 引入探究 GPS 面积测量仪的原理这一问题。（约 4 分钟）

教学方法：启发式教学法。

教师引导学生自主回顾牛顿-莱布尼茨公式，并理解其本质（约 2 分钟）

的值表示。

猜想:二元函数在区域上的积分可以用它的一个“原函数”在区域边界上的值表示,即

$$\iint_D (\quad) dx dy = \oint_L ?$$

【教师点拨】猜想是数学的一个重要的学习手段,它是一种合理推断。正如伟大的数学家、物理学家牛顿所说:没有大胆的猜想,就不能做出伟大的发现!数学史上有许多著名的猜想,如哥德巴赫猜想。从某种角度来看,猜想推动着数学理论的发展。

【引入问题】猜想 $\iint_D (\quad) dx dy = \oint_L ?$ 的形式如何?

【分析】 $\iint_D f(x, y) dx dy = \oint_L P(x, y) dx$ 或者 $\iint_D f(x, y) dx dy = \oint_L Q(x, y) dy$

【引出思考】上面等式的右端是封闭图形下,对坐标的曲线积分,以此,我们有必要探究封闭图形的曲线的方向。

概念讲授:单连通区域、复连通区域、区域边界的方向(正向/负向)(见图 12.38)。

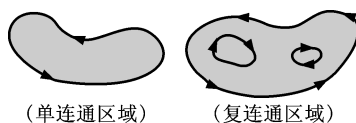


图 12.38 单连通、复连通区域

区域边界的方向:当人沿边界行走时,区域 D 总在其左边,该方向为边界的正向,相反为边界的负向。

【验证】 $\iint_D f(x, y) dx dy = \oint_L P(x, y) dx$ (1)

得出 $f(x, y)$ 与 $P(x, y)$ 的关系(教师板书过程,如图 12.39 所示)。

验证猜想 $\iint_D f(x, y) dx dy = \oint_L P(x, y) dx$ 若积分区域 D 是 X-型区域,且由正向分段光滑闭曲线 L 围成,则 $D: a \leq x \leq b$ $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$	$\begin{aligned} & \oint_L P(x, y) dx \\ &= \int_{L_1} P(x, y) dx + \int_{L_2} P(x, y) dx \\ &= \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx + \int_b^a P(x, \phi_2(x)) dx \\ &= \int_a^b P(x, y) \Big _{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \\ &= - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma \quad \boxed{f(x, y) = - \frac{\partial P}{\partial y}} \end{aligned}$
---	---

图 12.39 教师板书过程

教学方法:猜想、类比法。通过数学研究中常用的方法——类比法,引导学生猜想格林公式的结构。(约 2 分钟)

教学方法:合作交流。学生交流猜想格林公式的具体形式。培养学生由抽象→具体的能力。(约 2 分钟)

教学方法:动画直观。通过 PPT 直观演示单连通区域和复连通区域以及边界曲线的正向。(约 2 分钟)

◆格林公式

【定理】设平面区域 D 是由分段光滑闭曲线围成, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$$

该公式称为格林公式, 其中 L 是 D 的取正向的边界曲线。

注意: (1) 格林公式的实质: 使沿有向闭曲线的曲线积分与二重积分之间相联系。即

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$$

(2) 格林公式的条件:

① L 封闭, 取正向。

② P, Q 在 L 所围成区域 D 上有一阶连续偏导数。

当条件不满足时, 可补充条件。

(3) 利用曲线积分求平面图形面积的一种新方法:

正向闭曲线 L 所围成区域 D 的面积 $A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$ 。

【教师点拨】在利用格林公式进行计算时, 明确以下步骤: 明确曲线正向 → 指出 P, Q 函数 → 正确使用公式。

◆典型例题

【例题 1】设 L 是一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy dx + x^2 dy = 0$$

证明: 令 $P=2xy, Q=x^2$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

利用格林公式, 得

$$\oint_L 2xy dx + x^2 dy = \iint_D 0 dx dy = 0$$

【引出思考】GPS 面积测量仪是如何通过收集若干点的坐标算出平面不规则图形面积的呢?

手持 GPS 面积测量仪绕行测量区域一周, 仪器自动测量路线的坐标(图 12.40), 再利用格林公式得到面积:

$$A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \iint_D dx dy$$

教学方法: 积极引导。通过教师板书循序渐进、逐渐引导学生得到格林公式。(约 10 分钟)

教学方法: 讲授法。

设计意图: 教师板书格林公式的内容并阐述定理内容的注意点, 使学生深刻理解格林公式, 为利用格林公式进行计算和解决实际问题奠定基础。(约 8 分钟)

设计意图: 强调格林公式使用的条件。通过典型例题和揭秘 GPS 测量面积之谜, 培养学生学习知识意识和学以致用能力。(约 7 分钟)

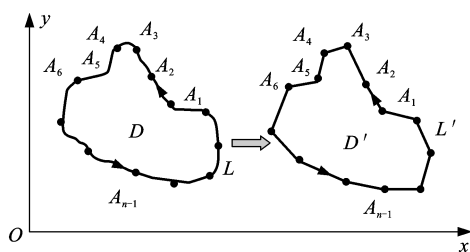


图 12.40 测量路线坐标

◆课堂小结

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ (牛顿 - 莱布尼兹公式)}$$

区间上的定积分, 同其两端点上的函数值之间的关系



$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy \text{ (格林公式)}$$

平面区域的二重积分同其边界上的曲线积分之间的关系

共性: 将内部问题转化成边界问题来处理。

◆课后思考

计算积分 $\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线。

▶【课后练习】

(1) 计算下列曲线积分, 并验证格林公式的正确性。

$\oint_L (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$, 其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $y^2 = x$ 所围成的区域的正向边界曲线。

(2) 利用曲线积分, 求下列曲线所围成的图形的面积。

①圆 $x^2 + y^2 = 2ax$;

②星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$

设计意图: 帮助同学梳理知识点, 以更好地掌握格林公式以及归纳猜想、类比推广的数学方法。(约 3 分钟)

设计意图: 学生在课后通过复习课堂内容和查阅资料自主积极或互相交流后求解问题。(约 2 分钟)

◆ 板书设计

板书设计如图 12.41 所示。

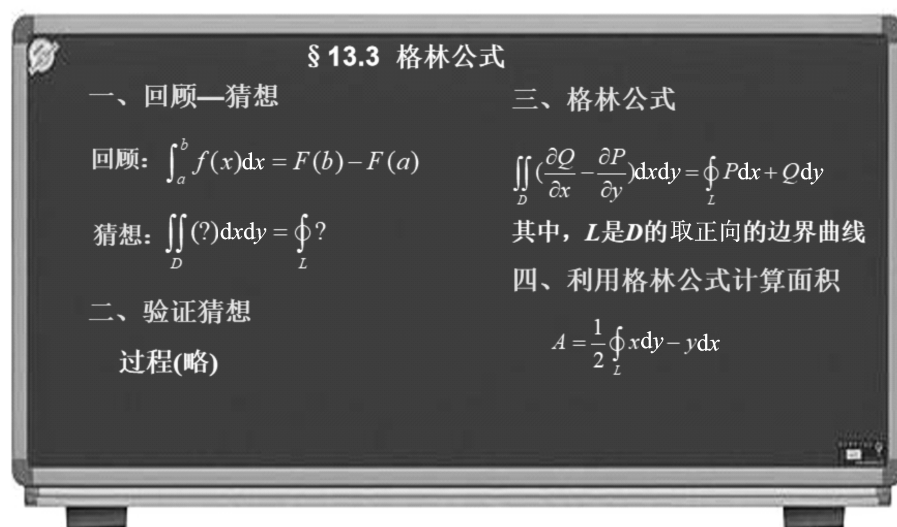


图 12.41 板书设计

教 学 后 记

本节课利用熟悉的知识为铺垫,引入新课程,既保持了知识的连贯性,又让学生对新课程有了整体的把握。在介绍格林公式之前,通过多媒体演示,让学生了解生活中应用 GPS 面积测量仪的实测。将实际问题抽象成数学问题,引导学生通过对已有知识的运用,总结归纳出定理的条件及结论。既培养了学生的分析能力,又树立了学生的自信心。格林公式的证明是一个教学难点,通过将整个证明过程分解成四个小问题,逐一进行解决,大大降低了该部分内容的难度,易于学生的理解。在教学过程中多次以提问的方式,引导学生积极思考,让学生充分参与,形成教学互动,融洽教学氛围。