

1.3

拉格朗日点

基本信息			
教学主题	拉格朗日点	课时安排	15 分钟
所在章节	第 9 章 限制性三体问题		

【教学目标】

❖ 知识目标

掌握拉格朗日点的物理意义和求解方法。

❖ 能力目标

能应用计算机求解复杂代数方程。

❖ 素养目标

通过拉格朗日点数值计算中选取不同初值得到不同结果的实践,培养学生深入思考、大胆尝试、小心求证的工程素养。

【教学重点与难点】

❖ 教学重点

拉格朗日点的力学和数学本质,拉格朗日的数值计算。

❖ 教学难点

三体问题的建模。

【课程思政】

- (1)通过嫦娥四号的案例,培养学生文化自信和航天强国的理想信念;
- (2)通过对拉格朗日点力学和数学本质的探究、培养学生深入探求,刨根问底的科学精神;
- (3)通过拉格朗日点数值计算程序代码的实践,突出基本原理与核心算法的重要性,淡化对编程语言的依赖,培养自力更生、自主创新的航天精神。

【教学思路和方法】

采用线上线下、课内课外、信息化教学与传统教学相结合的混合式教学方法。依托互联网和智能手机移动终端,将教学环节分为课前准备、课堂学习和课后复习拓展三个阶段。各阶段综合应用信息化教学方法、基于 BOPPPS 的五步教学法、启发引导式教学法、案例教学法等。

一、课前准备

- (1) 通过微信平台布置与本节内容密切相关的复习题，温故知新。
- (2) 通过教材和推送的课件，预习本节课程的内容，初步了解本节教学的重点和难点。

二、课堂学习

采用 ISW 的 BOPPPS 教学模式，辅之以智能手机微信 App 和腾讯问卷 App。

- (1) 课堂导入和前测。通过嫦娥四号的工程案例导入授课内容，提出引导性问题，激发学生的学习兴趣。
- (2) 课程目标。明确本节课的教学目标。
- (3) 参与式学习。采用提问、启发、类比、归纳及课堂小讨论等方式讲授，层层递进，以期突出重点，破解难点，开拓思维。
- (4) 课后检测和总结。以提问的方式，和学生一起总结本节课学习的主要内容，布置作业和网络测试题，提供拓展学习资料。

本节课通过将嫦娥四号的工程案例导入课程内容，引导学生进入课程具体内容的学习。首先通过对拉格朗日点外在特性的描述，引导学生深入剖析其力学本质和数学描述，将其计算转换为一般的数学问题；然后推导出拉格朗日点必须满足的代数方程，分析方程的特点；最后给出数值求解方法，并通过课堂计算机实践，培养学生用计算机解决问题的能力。

三、课后复习拓展

- (1) 鼓励学生积极参与微信教学群师生交流与讨论。
- (2) 督促学生完成课后作业以及下一次课的预习。
- (3) 通过腾讯问卷测试学生对重点难点问题的掌握程度，收集学生对本节课的意见和建议。
- (4) 推荐学生阅读科研论文，扩展学生的视野。

► 【教具】

电脑、投影仪、多媒体课件、激光笔、粉笔。

教 学 过 程

◆ 课堂导入(2 分钟)

导入

【新闻一】2018 年 12 月 8 日,我国在西昌卫星发射中心成功发射嫦娥四号探测器,开启了月球探测的新旅程。2019 年 1 月 3 日,嫦娥四号探测器成功着陆在月球背面(见图 1.24)。

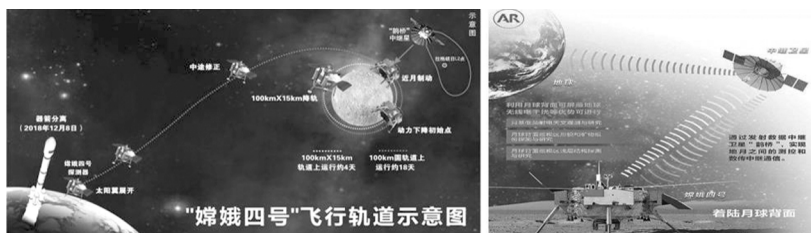


图 1.24 发射嫦娥四号探测器

【新闻二】2020 年 6 月,嫦娥四号任务团队优秀代表获得国际宇航联合会 2020 年度最高奖——“世界航天奖”。这也是该国际组织成立 70 年来首次把这一奖项授予中国航天科学家(见图 1.25)。



图 1.25 嫦娥四号任务团队获奖

通过以下两个问题,引入本节课教学目标和教学内容。

问题一:什么是拉格朗日点?它和传统的卫星轨道有什么不同?

问题二:地月空间拉格朗日点有多少个?它有什么独特的性质?(见图 1.26)

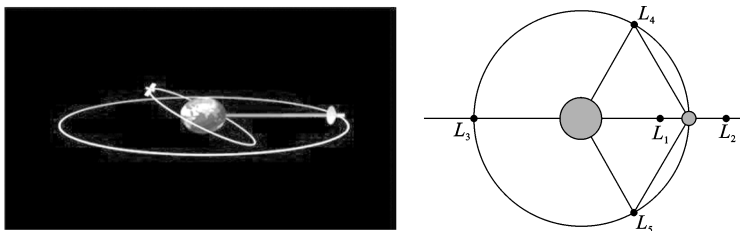


图 1.26 拉格朗日点

从航天热点新闻导入课程内容,启发学生思维,激发学生学习兴趣。

★ 课程思政

通过嫦娥四号首次月球背面登陆的案例,培养学生文化自信和航天报国的信念。

用引导性问题激发学生的求知欲。

课程内容(0.5 分钟)

- 拉格朗日点的力学模型
- 拉格朗日点的计算方法
- 拉格朗日点在工程上的应用

参与式学习(10.5 分钟)

引导学生复习上节内容。

一、限制性三体问题的动力学方程

限制性三体问题如图 1.27 所示。

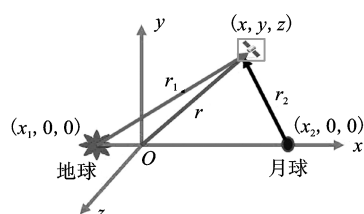


图1.27 三体问题

- r —航天器相对地月质心的位置矢量
- ω —月球绕地球旋转的角速度
- r_1 —航天器相对地心的位置矢量
- r_2 —航天器相对月心的位置矢量

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\frac{Gm_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{Gm_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2$$

拉格朗日点：航天器相对地月质心静止的点。

$$\dot{\mathbf{r}} \triangleq 0 \quad \ddot{\mathbf{r}} \triangleq 0$$

$$\cancel{\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \cancel{\frac{d\mathbf{r}}{dt}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\frac{Gm_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{Gm_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2$$

⇒ 拉格朗日点必须满足的方程

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\frac{Gm_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{Gm_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2$$

讨论：拉格朗日点的力学本质；向心力等于天体的引力。

数学本质：微分方程组的不动点。

二、微分方程组的不动点

微分方程组的不动点(平衡点) $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = [\mathbf{r} \quad \mathbf{v}]^T$ 。

当 $f(\mathbf{x}) = 0$, 则 $\dot{\mathbf{x}} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \text{const.}$

不动点计算 $f(\mathbf{x}) = 0$, 一般代数方程组无法求解析解

$$\text{牛顿迭代法: } x_{k+1} = x_k - \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{x_k}^{-1} f(\mathbf{x}_k)$$

具体结果与初值选取密切相关。

进行拉格朗日点的具体计算。

参与学习方式：通过与学生一起复习上节课内容，温故知新，形成前后知识的有机联系。

【板书】

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{r} \quad \dot{\mathbf{r}}]^T$$

★ 课程思政

通过对拉格朗日点力学和数学本质的探究，培养学生深入探究、刨根问底的科学精神。

将拉格朗日点的计算转化为一个数学问题——微分方程不动点的求解，培养学生善于利用数学方法解决问题的能力。



三、拉格朗日点满足的方程组

$$\text{矢量形式: } \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\frac{Gm_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{Gm_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2$$

$$\text{定义地、月质量占比: } \pi_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}, \pi_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2} \text{ (已知常数)}$$

$$\text{航天器相对地球: } \mathbf{r}_1 = [x-x_1 \quad y \quad z]^T = [x+\pi_2 r_{12} \quad y \quad z]^T$$

$$\text{航天器相对月球: } \mathbf{r}_2 = [x-x_2 \quad y \quad z]^T = [x-\pi_1 r_{12} \quad y \quad z]^T$$

标量形式(方程组)

$$\begin{cases} -\omega^2 x = -\frac{\mu_1}{r_1^3}(x+\pi_2 r_{12}) - \frac{\mu_2}{r_2^3}(x-\pi_1 r_{12}) \\ -\omega^2 y = -\frac{\mu_1}{r_1^3}y - \frac{\mu_2}{r_2^3}y \\ 0 = -\frac{\mu_1}{r_1^3}z - \frac{\mu_2}{r_2^3}z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z=0, \text{拉格朗日点} \\ \text{在地月平面内} \end{matrix}$$

从 $z=0$ 、 $y=0$ 引导学生将一个复杂问题逐步简化,培养学生将复杂问题简单化的能力。

四、拉格朗日点的求解

拉格朗日点在 xy 平面,方程组简化为

$$\begin{cases} (1-\pi_2)(x+\pi_2 r_{12})\frac{1}{r_1^3} + \pi_2(x+\pi_2 r_{12}-r_{12})\frac{1}{r_2^3} = \frac{x}{r_{12}^3} & (1) \\ (1-\pi_2)\frac{y}{r_1^3} + \pi_2\frac{y}{r_2^3} = \frac{y}{r_{12}^3} & (2) \end{cases}$$

情况1: $y=0$, 拉格朗日点在 x 轴,方程组简化为

$$(1-\pi_2)(x+\pi_2 r_{12})\frac{1}{r_1^3} + \pi_2(x+\pi_2 r_{12}-r_{12})\frac{1}{r_2^3} = \frac{x}{r_{12}^3}$$

将 $r_1 = |x+\pi_2 r_{12}|$ 、 $r_2 = |x-(1-\pi_2)r_{12}|$ 代入方程

$$\frac{(1-\pi_2)(x+\pi_2 r_{12})}{|x+\pi_2 r_{12}|^3} + \frac{\pi_2(x+\pi_2 r_{12}-r_{12})}{|x-(1-\pi_2)r_{12}|^3} = \frac{x}{r_{12}^3}$$

$$\text{令 } \xi = \frac{x}{r_{12}}, f(\xi) = \frac{1-\pi_2}{|\xi+\pi_2|^3}(\xi+\pi_2) + \frac{\pi_2}{|\xi+\pi_2-1|^3}(\xi+\pi_2-1) - \xi = 0$$

发现了三个平衡点,分别命名为拉格朗日 L_1 、 L_2 、 L_3 点。

【练习】编制计算机程序,计算地月系统拉格朗日点。

```
syms x;
mu = 0.01215; % 月球质量在地月系统中的占比
fx = (1-mu)/abs(x+mu)^3*(x+mu)+mu/abs(x+mu-1)^3*(x+mu-1)-x; % 拉格朗日点满足的方程
x1 = double(vpasolve(fx,0)) % 初值为0
x2 = double(vpasolve(fx,1)) % 初值为1
x3 = double(vpasolve(fx,-1)) % 初值为-1
```

参与学习方式: 让学生在课堂上进行编程实践,求解拉格朗日点,并结合教师所给的程序进行对比分析,突出初值选取的重要性。

★ 课程思政

在编程实践中,突出基本原理和核心算法,淡化对编程语言的依赖,培养自力更生、自主创新的航天精神。

$$\text{回到原方程组} \begin{cases} (1-\pi_2)(x+\pi_2 r_{12})\frac{1}{r_1^3} + \pi_2(x+\pi_2 r_{12}-r_{12})\frac{1}{r_2^3} = \frac{x}{r_{12}^3} \\ (1-\pi_2)\frac{y}{r_1^3} + \pi_2\frac{y}{r_2^3} = \frac{y}{r_{12}^3} \end{cases}$$

情况 2: $y \neq 0$, 还存在两个拉格朗日点。

拉格朗日 L_4 、 L_5 点。

课后自学: 求解拉格朗日 L_4 、 L_5 点。

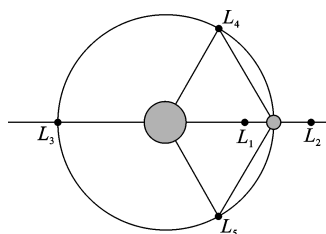


图 1.28 拉格朗日点

共有 5 个拉格朗日点(见图 1.28), 其中, 3 个共线, 2 个共圆。行星卫星系统有拉格朗日点
恒星行星系统有拉格朗日点

五、应用案例

(1) 嫦娥探月(见图 1.29)。

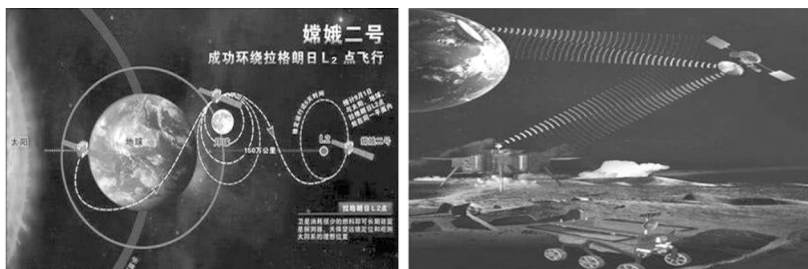


图 1.29 嫦娥四号

(2) 价值 98 亿美元的韦伯太空望远镜将安置在日地拉格朗日 L_2 点(见图 1.30)。

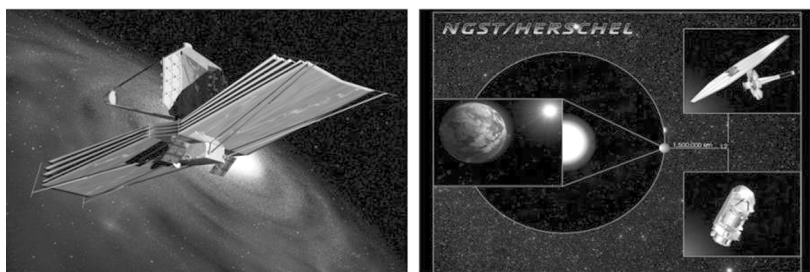


图 1.30 韦伯太空望远镜将安置在日地拉格朗日 L_2 点

(3) 行星际超高速公路: 利用拉格朗日点力学性质构造不需要燃料在太阳系航行的交通网(见图 1.31)。

参与学习方式: 让学生在课后自学教材内容, 应用本节讲述的方法, 求解另外两个拉格朗日点。

通过三个前沿的工程案例, 让学生了解拉格朗日点应用的工程前沿, 激发学生进一步深入学习的兴趣。

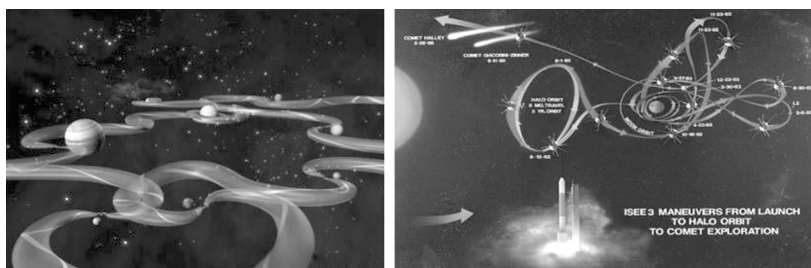


图 1.31 行星际超高速公路构想

◆ 总结(2 分钟)

小结：拉格朗日点

数学本质：限制性三体动力学方程的不动点

力学本质：向心力=天体 1 的引力+天体 2 的引力

求解方法：牛顿迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]_{x_k}^{-1} f(x_k)$$

独特性质：相对两大天体静止(见图 1.32)

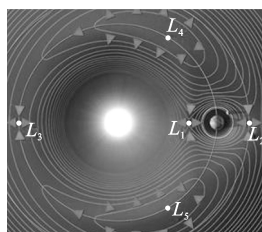


图 1.32

与板书相呼应。

课后导学

【作业】(1)推导限制性三体问题的动力学方程。

(2)计算地月 5 个拉格朗日点。

【测试】(1)地月拉格朗日点是地月引力平衡的点吗？

(2)请你对本节课教学目标达成度进行自我评价。

【拓展】梁伟光, 周文艳, 雪丹, 等. 解析计算在月球中继卫星 Halo 轨道设计中的应用[J]. 宇航学报, 2016, 37(10): 1171-1178.



板书设计

$\dot{x} = f(x) = 0$ 不动点

$x = [r \quad \dot{r}]^T$

$\omega \times \omega \times r = -\frac{Gm_1}{r_1^3} r_1 - \frac{Gm_2}{r_2^3} r_2$ 力平衡



教 学 后 记

- (1) 通过大量引导性问题, 引导学生思考, 培养学生的深入探索和开放性思维的能力。
- (2) 通过大量工程案例, 加深学生对所学问题的理解, 提高学生学习兴趣。
- (3) 通过计算机程序开发, 锻炼学生解决实际问题的能力, 培养严谨细致的工作作风。