

1.5

二体运动方程

基本信息

教学主题	二体运动方程	课时安排	15 分钟
所在章节	第 2 章 二体运动		

【教学目标】

❖ 知识目标

能理解二体运动方程建模的基本思想，并能应用其解决复杂工程中的动力学建模问题。

❖ 能力目标

能应用计算机求解二体运动方程，并具备一定数据分析能力。

❖ 素养目标

- (1) 能从不同的坐标系观察同一组微分方程，培养多角度思考问题的工程意识。
- (2) 通过动手编制二体相对运动程序，培养学生注重逻辑，关注细节的专业素养。

【教学重点与难点】

❖ 教学重点

二体运动方程的推导。

❖ 教学难点

二体运动方程在不同坐标系中的表现形式。

【课程思政】

- (1) 通过二体运动方程建模思想的进一步归纳，得到更具普适性的动力学建模方法，培养学生认真观察、深入思考的科学思维。
- (2) 通过动手编制卫星二体运动方程计算程序，培养学生严谨细致的科学精神；强调基本理论和核心算法，淡化对具体程序语言的依赖，发扬自力更生、自主创新的航天精神。
- (3) 通过中国嫦娥四号和天链数据中继卫星工程案例，培养学生航天强国和航天报国的家国情怀。

【教学思路和方法】

采用线上线下、课内课外、信息化教学与传统教学相结合的混合式教学方法。依托互联网和智能手机移动终端，将教学环节分为课前准备、课堂学习和课后复习拓展三个阶段。各阶段综合应用信息化教学方法、基于 BOPPPS 的五步教学法、启发引导式教学法、案例教学法等。



一、课前准备

- (1)通过微信平台布置与本节课内容密切相关的复习题,温故知新。
- (2)让学生思考卫星无动力飞行的原因,成为地球人造卫星的充分必要条件。
- (3)通过教材和推送的课件,预习本节课的内容,初步了解本节课教学的重点和难点。

二、课堂学习

采用 ISW 的 BOPPPS 教学模式,辅之以智能手机微信 App 和腾讯问卷 App。

- (1)课堂导入和前测。以两个常见现象提炼的问题导入授课内容,激发学生兴趣。
- (2)课程目标。明确本节课的教学目标。
- (3)参与式学习。采用提问、启发、类比、归纳及课堂小讨论等方式讲授,层层递进,以期突出重点,破解难点,开拓思维。
- (4)课后检验和总结。总结本节课学习的主要内容,提出要求,给出预习提示和拓展要求。

本节课通过将飞机飞行和卫星飞行案例导入课程内容,提出“卫星在空间飞行为什么不需要动力”的问题,引导学生进入本节课具体内容的学习。采用温故知新、层层推进的方式,从学生熟知的牛顿第二定律和万有引力定律出发,重点讲解二体运动方程建模的过程,特别坐标系和参考点选择对运动方程的影响。通过轨道的具体实例和 MATLAB 编程计算加深对二体运动方程的理解,培养学生应用数学理论和计算机工具解决问题的核心能力。

三、课后复习拓展

- (1)鼓励学生积极参与微信教学群师生交流与讨论。
- (2)督促学生完成课后作业以及下一次课的预习。
- (3)通过腾讯问卷测试学生对重点难点问题的掌握程度,收集学生对本节课的意见和建议。
- (4)推荐学生阅读文献,扩展学生的视野。



【教具】

电脑、投影仪、多媒体课件、激光笔、粉笔。

教 学 过 程

◆ 课堂导入(2 分钟)

提出两个问题(见图 1.40、图 1.41)。



图 1.40 飞机的密度比空气重,为什么不会从空中掉下来

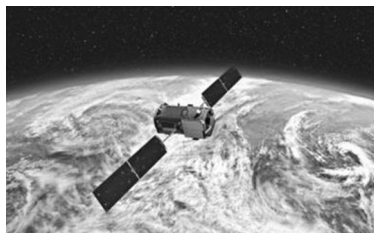


图 1.41 飞机飞行需要航空发动机提供动力,卫星飞行也需要动力吗?

通过导入生活中的实际案例,激发学生的学习兴趣,引导学生深入思考,带着问题进入后续的学习。

◆ 课程内容(1 分钟)

- 二体运动方程的数学建模
- 不同形式的二体运动方程
- 二体运动方程的工程应用

◆ 参与式学习(32 分钟)

一、二体运动方程的数学建模

牛顿第二定律: $F = m \cdot a$ 。

万有引力定律: 引力大小与它们质量的乘积成正比,与它们距离的平方成反比。

图 1.42 为解析图。

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{4} = m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2}$$

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}_2}{r} = m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2}$$

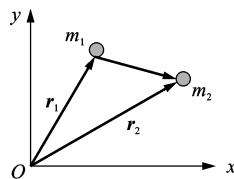


图1.42 解析图

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{4} = m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + \frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}_2}{r} = m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)}{dt^2} = 0 \quad r_{cm} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{质点系质心}$$

从学生熟知的牛顿第二定律出发,采用层层递进的方式展开课程内容的学习。

【板书】

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_{cm}}{dt^2} = 0 \quad \text{内力不改变系统质心的运动状态。}$$

讨论: 大家举几个实例。

引导学生推导出二体运动方程。

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r} = m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{4} = m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2}$$

$$\text{得到: } -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2} \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{r} = \frac{d^2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{dt^2}$$

$$\text{定义: } \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$

二体运动方程, 描述 m_2 相对 m_1 的运动

二、进一步归纳

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{改写成} \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r^3} \mathbf{r} - \frac{Gm_2}{r^3} \mathbf{r}$$

其中: $-\frac{Gm_1}{r^3} \mathbf{r} = \sum \mathbf{F}$ 为 m_1 所受的合外力产生的加速度;

$$a_0 = \frac{Gm_2}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{为 } m_2 \text{ 对 } m_1 \text{ 的万有引力产生的加速度。}$$

得到: 非惯性坐标系(坐标原点有加速度)牛顿第二定律

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\sum \mathbf{F}}{m_2} - a_0$$

非惯性坐标系牛顿第二定律可以直接得到二体运动方程, 且更具普适性。

三、进一步归纳的应用

如果向月球发射一个月球探测器, 其相对地月质心的相对运动方程是什么?

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM_E}{r_{Es}^3} \mathbf{r}_{Es} - \frac{GM_M}{r_{Ms}^3} \mathbf{r}_{Ms}$$

如果向月球发射一个月球探测器, 其相对地球质心的相对运动方程是什么?

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM_E}{r_{Es}^3} \mathbf{r}_{Es} - \frac{GM_M}{r_{Ms}^3} \mathbf{r}_{Ms} - \frac{GM_M}{r_{EM}^3} \mathbf{r}_{EM} = -\frac{GM_E}{r_{Es}^3} \mathbf{r}_{Es} + \left(\frac{GM_M}{r_{Ms}^3} \mathbf{r}_{Ms} - \frac{GM_M}{r_{EM}^3} \mathbf{r}_{EM} \right)$$

四、不同形式的二体运动方程

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{为矢量形式的非线性微分方程。}$$

为了在实际中应用, 需要转换为标量形式

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z$$

参与学习方式: 通过讨论, 加深学生对内力不改变质心的认识和对二体动力学系统特性的理解, 同时启发学生思维, 吸引学生的注意力。

参与学习方式: 引导学生认真观察二体运动方程, 启发学生发现更一般的建模方法, 并层层深入地引导学生自主得出结论。

【板书】

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\sum \mathbf{F}}{m_2} - a_0$$

★ 课程思政

通过对二体运动方程建模思想的进一步归纳, 得到更具普适性的动力学建模方法。培养学生认真观察、深入思考的科学思维。

通过两个应用案例, 进一步让学生认识到普适性建模方法的优势。

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}x \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}y \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}z \end{cases}$$

直角惯性坐标的基矢量不随时间变化。

龙格库塔方法 MATLAB 函数: ode45

```
[t,y]=ode45(@ orbit,tspan,x0,options)
function dy=orbit(t,y,mu)% 函数功能和输入输出描述
dy=zeros(6,1);
r=sqrt(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2);
dy(1)=y(2);
dy(2)=-mu/r^3*y(1);
dy(3)=y(4);
dy(4)=-mu/r^3*y(3);
dy(5)=y(6);
dy(6)=-mu/r^3*y(5);
end
```

由图 1.43 可知, 航天器在地心引力作用下, 运动轨迹为椭圆。

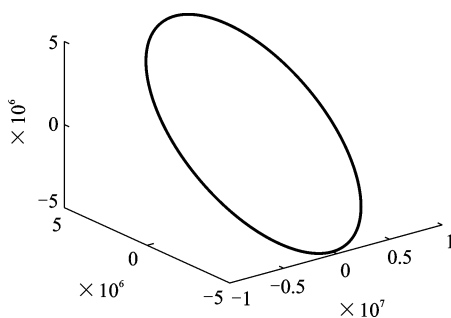


图 1.43 运动轨迹图

讨论: 能否将这个结论普适化?

课后实验: 给定不同的初始状态, 通过分析三维图形研究航天器相对地心的运动规律。

如图 1.44 所示的极坐标, 推导二体运动方程的形式。

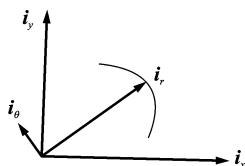


图 1.44 极坐标

(1) 判断该极坐标是否为惯性坐标系。

$$\omega = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}]^T$$

采用不同坐标系观察二体运动方程, 培养学生多角度看问题的思维习惯。

参与学习方式: 通过安排学生动手编制二体相对运动程序, 培养学生利用计算机解决问题的能力。

★ 课程思政

通过动手编制计算机程序, 培养学生严谨细致的科学精神; 强调基本理论和核心算法, 淡化对具体程序语言的依赖, 发扬自力更生、自主创新的航天精神。



(2) 该坐标系中二体运动方程的矢量形式?

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$

(3) 位置矢量和速度矢量在极坐标中的描述

$$\mathbf{r} = [r \ 0 \ 0]^T \quad \mathbf{v} = [\dot{r} \ r\dot{\theta} \ 0]^T$$

(4) 代入矢量方程

$$\ddot{r} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

$$r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2\dot{r} \frac{d\theta}{dt} = 0$$

相对直角坐标系: 该方程更能直观揭示卫星飞行的物理规律。

讨论: 分析卫星无动力飞行的原因。

五、工程应用

(一) 工程应用一: 嫦娥探测器不同阶段动力学建模

2018年12月8日嫦娥四号月球探测器成功发射。

(1) 以地月质心为参考点, 其动力学方程的具体表达形式

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM_E}{r_{E_s}^3} \mathbf{r}_{E_s} - \frac{GM_M}{r_{M_s}^3} \mathbf{r}_{M_s}$$

(2) 以地心为参考点, 其相对运动方程的表达形式

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM_E}{r_{E_s}^3} \mathbf{r}_{E_s} - \frac{GM_M}{r_{M_s}^3} \mathbf{r}_{M_s} - \frac{GM_M}{r_{EM}^3} \mathbf{r}_{EM}$$

(二) 工程应用二: 地球静止轨道设计

应用: 计算地球静止轨道卫星的高度(见图1.45)。

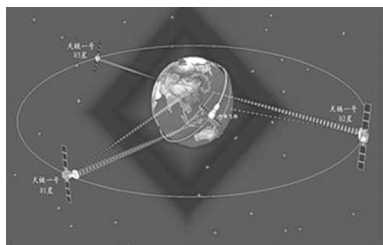


图1.45 计算卫星高度

极坐标的二体运动方程:

$$r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{\mu}{r^2}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{86400} \right)^2 = -\frac{\mu}{r^3}$$

$$r = 42164.169 \text{ km}$$

参与学习方式: 引导学生分析极坐标下的二体运动方程, 得出卫星无动力飞行的原因, 与导入问题相呼应。

通过嫦娥四号工程案例的引入, 帮助学生理解二体运动方程的具体工程应用, 培养学以致用能力。

★ 课程思政

通过中国嫦娥四号和天链数据中继卫星工程案例, 培养学生航天强国和航天报国的家国情怀。

◆ 总结(2 分钟)

小结

二体相对运动方程: $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$

更普适的建模方法: $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\sum \mathbf{F}}{m_2} - \mathbf{a}_0$

不同坐标系描述: $\ddot{r} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\dot{r} \frac{d\theta}{dt} = 0$

与板书相呼应。

课后导学

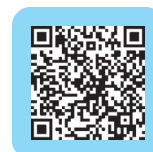
【作业】(1) 重复二体运动方程的推导过程。

(2) 推导极坐标系下二体运动方程。

【测试】(1) 阐述二体动力学方程的建模过程。

(2) 请你对教学目标达成度进行自我评价。

【拓展】阅读 MIT 教材: Battin R H. An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics[M]. AIAA, 1999: 97-99, 110.



板书设计

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m} \Rightarrow \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\sum \mathbf{F}}{m_2} - \mathbf{a}_0 \Rightarrow \text{多个天体}$$

教

学

后

记

(1) 采用温故知新的方法, 从学生已经掌握的知识中, 通过层层递进、引导性深入的方式, 学生跟随教师的思路, 积极参与学习。

(2) 结合中国嫦娥四号探测器近期取得的巨大成绩, 学生不仅提高了学习的积极性, 同时也树立了航天器强国、航天报国的理想信念。

(3) 程序编制的内容可以让学生预习后上台讲解。学生通过对程序是否优劣的点评, 提高自己的工程素养。