

## 2.4

## 共振的魔力

基本信息

教学主题	共振的魔力	课时安排	1 课时
所在章节	第 10 章 结构动力学/第 4 节 单自由度体系的受迫振动		

## 【教学目标】

## ❖ 知识目标

- (1) 熟练掌握单自由度体系在简谐荷载作用下的受迫振动(动内力、动位移计算)。
- (2) 掌握共振现象的原理,了解共振现象的利用与避害措施。

## ❖ 能力目标

- (1) 培养学生发现问题、分析问题并合理简化,解决工程实际问题的能力。
- (2) 培养学生的观察能力和逻辑推理能力,以及运用分析、比较、归纳与演绎等科学研究方法的能力。
- (3) 能将力学、数学、工程学的知识点有机结合,发现力学、数学、工程学之间的联系。
- (4) 贯通自然科学与社会科学,能借助于力学原理理解和解读社会组织、管理及发展规律。

## ❖ 素质目标

- (1) 严谨认真的职业精神。
- (2) 安全意识。

## 【教学重难点及处理】

## ❖ 教学重难点

- (1) 单自由度体系运动方程的建立方法。
- (2) 共振现象的利用与避害措施。

## ❖ 处理

- (1) 以乒乓球亲子玩具帮助学生理解计算模型。
- (2) 以港珠澳大桥、上海中心大厦、中国台湾 101 大楼的避震措施为例,理论联系实际。

## 【教具】

现有教具: 电脑, 投影仪, 多媒体课件(图、文、视频), 激光笔, 粉笔。  
计划研发教具: 多跨连续梁模型(可拆卸、拼装)。

# 教 学 过 程

## ◆ 课堂导入

教师活动:

如图 2.49 所示,上课伊始,提出两个问题。

提问 1:什么是共振现象?

提问 2:为何共振现象能震塌一座桥?



图 2.49 PPT 封面

学生活动:思考上述两个问题。

## ◆ 内容简介

- (1)什么是共振现象?(10分钟)
- (2)单自由度体系的受迫振动。(25分钟)
- (3)结构振动控制的工程应用实例。(10分钟)

## ◆ 课程开展

### 一、什么是共振现象?(10分钟)

交流电之父尼古拉·特斯拉说过:“用一件共振器,我就能把地球一裂为二!”那么什么是共振现象呢?

如图 2.50 所示,1940 年 11 月,塔科马海峡大桥在低风速中由于颤振而坍塌,这次惨重的工程事故使得空气动力学和共振实验成为建筑工程学的必修课,一门新的学科——桥梁风工程学也很快应运而生了。著名的空气动力学家冯·卡门利用模型实验,得出结论:正是卡门涡街导致了桥梁发生共振,从而引发了坍塌事故。我国著名科学家钱伟长、钱学森、郭永

教学方法:启发式教学。

设计意图:引起学生求知欲望。

以封面的桥梁垮塌动图来引起学生思考,导入本节课的内容。

※案例分析

设计意图:讲述共振现象的危害,以证明结构动力学研究的重要性。

怀都是他的亲传弟子。

2020年5月5日14时左右，虎门大桥出现了异常振动，主要原因是沿桥跨边护栏连续设置水马，改变了钢箱梁的气动外形，在特定风环境条件下便产生了桥梁涡振现象。

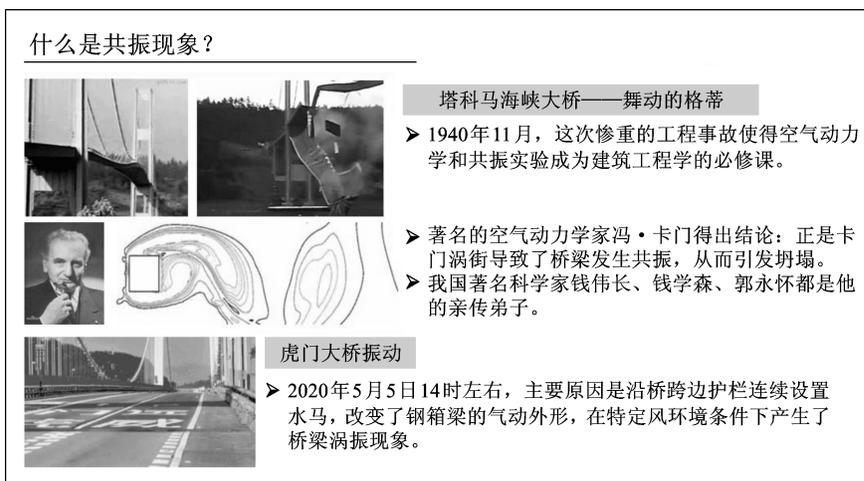


图 2.50 共振现象与桥梁

共振现象除了可以造成桥梁的垮塌之外，其实在生活中也无处不在。如图 2.51 所示，共振会引起人的晕车、雪崩、机器损坏、热带风暴猖獗、大楼因风摇晃等后果。

人类可以利用共振现象为我所用，比如 2020 年 6 月美国国民警卫队用“声波炮”驱散抗议人群，还有建筑施工中的共振打桩、实验室中的共振筛等。

因此讲到受迫振动时引入桥梁共振破坏实例和生活中的各种共振现象，不仅有助于学生了解学习该内容的重要性，也有助于学生培养良好的思考能力和严谨认真的职业精神。

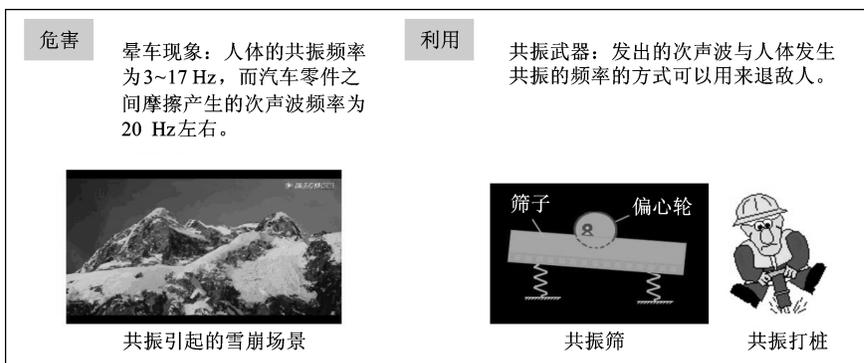


图 2.51 各种共振现象

提问：既然共振现象无处不在，那么我们如何从结构动力学去解释这种现象呢？

★ 课程思政  
培养学生严谨认真的职业精神。

以生活实例证明共振现象无处不在。

提问环节。

## 二、单自由度体系的受迫振动(25 分钟)

以生活中常见的乒乓球亲子玩具为例(见图 2.52),建立结构动力学计算模型——悬臂柱,进行振动分析,得到单自由度体系的受迫振动微分方程,这是共振现象研究的基础。

由简至难,从无阻尼至有阻尼。

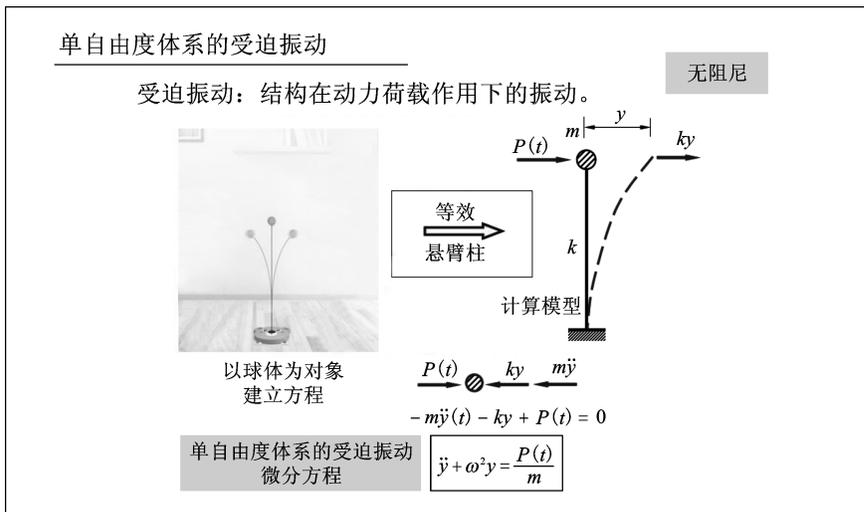


图 2.52 单自由度体系受迫振动微分方程

动力荷载有很多种形式,简谐荷载更是一种常见的动力作用,如机械的旋转部件因或多或少存在着偏心而产生的离心力即为其中一例。

我们以最简单的简谐荷载为例,对方程进行求解,得到方程的通解。方程的通解由两部分组成,第一部分按结构的自振频率振动,真实状态下由于阻尼的存在会逐步衰减至无,这部分是过渡阶段;第二部分按动力荷载的频率振动,是平稳的振动阶段(见图 2.53)。

单自由度体系的受迫振动

简谐荷载:  $P(t) = F \sin \theta t$

运动方程:  $\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{F}{m} \sin \theta t$  是一个二阶常系数非齐次微分方程

解的形式:  $y = \bar{y} + y^*$

齐次解:  $\bar{y} = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$  特解:  $y^* = A \sin \theta t$

$$(-\theta^2 + \omega^2) A \sin \theta t = \frac{F}{m} \sin \theta t \quad A = \frac{F}{m(-\theta^2 + \omega^2)}$$

$$y^* = \frac{F}{m(-\theta^2 + \omega^2)} \sin \theta t$$

方程通解:  $y = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{F}{m(\omega^2 - \theta^2)} \sin \theta t$

其中:  $C_1$ 、 $C_2$  由初始条件确定。

(a)

方程通解:  $y = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{F}{m(\omega^2 - \theta^2)} \sin \theta t$

其中:  $C_1, C_2$  由初始条件确定, 若:  $y(0)=0, \dot{y}(0)=0$

$$C_1 = -\frac{F\theta}{m(\omega^2 - \theta^2)\omega}, C_2 = 0$$

方程全解:  $y = -\frac{F\theta}{m\omega(\omega^2 - \theta^2)} \sin \omega t + \frac{F}{m(\omega^2 - \theta^2)} \sin \theta t$

按结构的自振频率振动, 真实状态下由于阻尼的存在会逐步衰减至无, 是过渡阶段。

按动力荷载的频率振动, 是平稳的振动阶段。

(b)

图 2.53 方程通解

由于第一部分终将因阻尼的存在而衰减, 因此我们只研究第二部分的运动。本节内容先从无阻尼状态开始讲起。

无阻尼体系平稳阶段的动位移、动力系数求解过程, 以及外力荷载频率与自振频率比值  $\theta/\omega$  和动力系数  $\beta$  的关系如图 2.54 所示。

单自由度体系的受迫振动

平稳阶段:  $y(t) = \frac{F}{m(\omega^2 - \theta^2)} \sin \theta t = \frac{F}{m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2})} \sin \theta t$

$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{1}{m\delta} \quad \frac{F}{m\omega^2} = F\delta = y_{st} \iff$  静位移

$y(t) = y_{st} \frac{1}{(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2})} \sin \theta t$

$[y(t)]_{\max} = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} y_{st} = \beta y_{st}$

最大动位移

动力放大系数  $\beta = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}$

图 2.54 共振现象

由以上的分析可见, 简谐荷载作用下无阻尼稳态振动的主要特征如下:

(1) 无阻尼体系在简谐荷载作用下的稳态反应是简谐振动, 并且稳态受迫振动的频率即为简谐荷载的变化频率, 同时动位移、惯性力及体系的动内力均与干扰力同时达到幅值。

(2) 当  $\theta \ll \omega$  时,  $\theta/\omega \rightarrow 0, \mu \rightarrow 1$ , 此时体系振动的很慢, 速度、加速度都很小, 因此惯性力和阻尼力都很小, 动荷载主要与弹性力平衡, 荷载可做静荷载处理。工程实际中, 通常当  $\theta/\omega \leq 0.2$  时即可按静力方法计算振幅。

(3) 当  $\theta \gg \omega$  时,  $\theta/\omega \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0$ , 表明当干扰力频率远大于体系的自振频率时, 动位移反而趋向于零, 我们可以称之为哲学上的湮灭。

总结共振现象规律。

(4)当  $\theta/\omega \rightarrow 1$  时,  $\mu \rightarrow \infty$ , 即体系的振幅将趋于无穷大。实际结构中由于阻尼的存在, 振幅不可能趋于无穷大, 但它仍将远大于静位移的值, 这种现象称为共振。

在工程设计中应尽量避免共振现象的发生, 一般应控制  $\theta/\omega$  避开  $0.75 < \theta/\omega < 1.25$  的共振区段。在  $\theta/\omega < 1$  的共振前区, 为使振幅减小, 可设法增大结构的自振频率, 这种方法叫作刚性方案; 在  $\theta/\omega > 1$  的共振后区, 则应设法减小结构的自振频率以减小振幅, 这种方法叫作柔性方案。

### 三、结构振动控制的工程应用实例(10分钟)

提问: 既然共振现象无可避免, 那么工程实际中是如何避免共振现象带来损害的?

以我国的港珠澳大桥、上海中心大厦、中国台湾 101 大楼的振动控制实例来讲述桥梁工程和高层建筑的避震措施, 如图 2.55 所示。

提问环节。  
理论联系实际。



图 2.55 结构振动控制的工程应用实例

### ◆ 思考拓展

结构振动控制的概念是美国学者 J. T. P. Yao 在 1972 年首先提出来的。结构振动控制分为被动控制、主动控制、混合控制和智能控制等。本节内容最后的振动控制实例只是其中很小的一部分, 大家有兴趣的话, 可以在课堂后搜索相关信息。

W. C. 丹皮尔在《科学史及其与哲学和宗教的关系》序言中的诗, 人类在面对大自然时, 宗教尝试着与自然发生感应来理解和顺从自然, 但祭坛和祭品并不能减少灾难! 圣人与哲学家曾企图构建有关自然界亘古不变的方案, 但事实证明这些方案很快就烟消云散了。科学家以一种卑微的身份, 在自然面前满足于跑龙套, 通过幻想、检验, 以碎片化的方式解读大自然, 但自然的景象不断变幻, 却始终不揭示出碎片的底细。

★ 课程思政  
结构振动控制是目前学术界的前沿热点问题, 培养学生不断探索的科学精神。

……

变化不已的图案在远方闪光；  
但它的景象不断变幻，  
却没有揭示出碎片的底细，  
更没有揭示出字谜画的意义。  
大自然在微笑，  
却不肯供出她内心的秘密，  
她不可思议地保护着，  
猜不透的斯芬克斯之谜！

### ◆ 归纳小结

共振现象有利有弊，要熟练掌握结构动力学的原理，才能合理趋利避害。无论是在设计之初还是建成之后，工程的动力安全问题必须时刻关注。

再次升华，培养学生安全意识。

### ◆ 课后作业

安全是金，常记在心。

(1) 预习教材 10-5 两个自由度体系自由振动内容，并思考什么是鞭梢效应。

(2) 某单质点单自由度体系由初位移  $y_0 = 2 \text{ cm}$  产生自由振动，经过 8 个周期后测得振幅为  $0.2 \text{ cm}$ ，试求阻尼比及在质点上作用简谐荷载发生共振时的动力系数。

(3) 如图 2.56 所示，求梁纯强迫振动时的最大动力弯矩图和质点的振幅。已知：质点的重量  $W = 24.5 \text{ kN}$ ， $F_p = 10 \text{ kN}$ ， $\theta = 52.3 \text{ s}^{-1}$ ， $EI = 3.2 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 。不计梁的重量和阻尼。

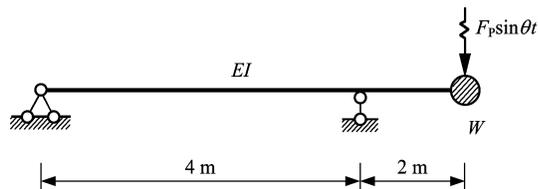


图 2.56 (3) 题图

(4) 求图 2.57 所示刚架稳态振动时的最大动力弯矩图和质点的振幅。

已知： $F_p = 2.5 \text{ kN}$ ， $\theta = \sqrt{\frac{4}{3}} \omega$ ， $EI = 2.8 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ 。不考虑阻尼。

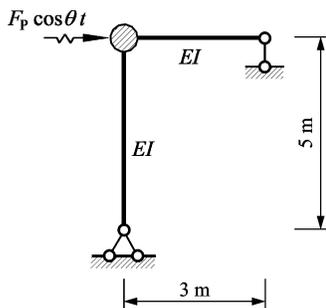


图 2.57 (4) 题图

## ◆ 板书设计

共振研究——单自由度受迫振动

{ 塔科马海峡大桥共振垮塌, 工程安全  
晕车, 共振武器等, 趋利避害

自振频率  $\omega$

动力荷载频率  $\theta$

{  $\theta/\omega \rightarrow 1$ , 动力系数  $\beta$  无穷大, 共振产生  
 $\theta \ll \omega$ , 外力不够, 结构不振动  
 $\theta \gg \omega$ , 外力过强, 湮灭了

## ▶ 【思考题】

动力系数的含义是什么? 它的影响因素有哪些?

## 教 学 反 思

本节教学内容是“单自由度体系的受迫振动”, 如果只是单纯地讲结构动力学内容, 而不结合工程实际, 鉴于公式推导过程的烦琐复杂, 学生很容易放弃理解。如何提升学生的学习主动性和积极性, 是笔者在进行教学设计时的首要考量。力学是为工程实践服务的, 因此能不能结合工程实际, 是力学教育的关键。

通过塔科马海峡大桥的共振坍塌事件、虎门大桥异常振动事件, 以及生活中的晕车现象、电影中的雪崩场景、美国使用声波武器驱散抗议人群、共振打桩等案例, 帮助学生认识到共振现象无处不在。

关于塔科马海峡大桥的坍塌事件与冯·卡门, 我们这里引申开来。实际上早在 1911 年冯·卡门就发现了“卡门涡街”现象并发表了论文, 在 1940 年塔科马海峡大桥发生坍塌后, 冯·卡门猜测是卡门涡街引起的桥梁共振导致坍塌, 但是他的猜测直到 1960 年经过大量的计算和实验, 才被证实是正确的。人们完全搞清楚一件事情的来龙去脉是十分漫长的, 尤其是从科学的产生到技术的进步, 再到形成行业标准更是建立在无数的失败、假想、猜测、计算、实验、认证之上。

在课外, 我们可以继续往远了说。武际可在他的学术论文《从荡秋千说开去——漫话共振》中, 有一段是这样写道: “光线是一种特殊的电磁波, 原子内的电子做跃迁时也要以一定频率放出能量, 要检测或放大它们, 就要精细地设计能和这些频率可以共振的特殊装置。正是在这种思考的指引下, 人们造出了照射强度为地球上太阳光亮度  $10^{10}$  倍、其粗细仅 1 微米直径的激光, 最近人们造出了一亿年误差不超过 1 秒的原子钟, 等等。由于这些新的利用共振原理的发明非常精细和奇特, 所以在 20 世纪中, 有不少的基于共振原理的发现和发明获得了诺贝尔奖。”

笔者十分喜欢一本科普刊物《大科技·科学之谜》, 在这里一定要推荐给大家。它是我国第一本以开拓思维、丰富想象力为宗旨的科普刊物, 主要介绍当前世界上最新的科学理论、各种科学假设和最新科学成就, 它的语言十分有趣易懂, 是笔者一直想模仿的对象。2004 年第 7 期里有一篇李唐写的《共振的魔力》, 这篇科普论文从共振产生宇宙到信息技术、基因科学、纳米材料、航天科学等各个方面讲述了共振现象, 知识面之广令人折服。



“科技创新、科学普及是实现创新发展的两翼，要把科学普及放在与科技创新同等重要的位置”。高校教育是科学普及的重要一环，如何将教学内容讲得生动有趣，且兼具专业深度，一直是笔者从教以来的追求。