

3.4

对称性的利用——半边结构的取法

基本信息			
教学主题	对称性的利用——半边结构的取法	课时安排	1 课时(45 分钟)
所在章节	第 7 章 力法/第 6 节 对称性的利用		

【教学目标】

❖ 知识目标

掌握对称结构半边结构的取法；准确理解对称性的概念；掌握利用对称性进行简化计算的方法。

❖ 能力目标

通过课堂讨论、学习等活动，学生探究利用结构对称性进行简化计算的原理、方法，理解对称性的概念；学会为对称结构取半边结构，探索半边结构与原结构之间的区别和内在联系，培养观察、分析、合作交流的能力；通过算例学习、教学互动等教学环节，学会用不对称的荷载进行荷载分组；在教师的引导下，理解对称结构的半边结构截取的过程、原理，归纳总结各种刚架半边结构的取法，培养抽象概括能力。

❖ 素质目标

对称结构在实际结构中非常常见，比如港珠澳大桥的四座通航桥、北京大兴国际机场等均为对称结构。港珠澳大桥是创造 400 多项新专利、7 项世界之最的世界上最长的跨海大桥，被外国媒体称为“新世界七大奇迹”。而北京大兴国际机场将于 2019 年 9 月投入使用，被称为世界上最大的空港、“新世界七大奇迹”之首。港珠澳大桥奇迹的背后，是团结合作、开拓创新的精神，教师以此激发学生奋发图强、报效祖国的民族精神。

【教学重点与难点】

❖ 教学重点

- (1) 对称性的概念(结构、荷载)。
- (2) 利用结构对称性简化计算的方法和结论。
- (3) 超静定对称结构的半边结构取法。

❖ 教学难点

- (1) 对称结构在正对称和反对称荷载作用下的受力特点。
- (2) 偶数跨超静定对称结构的半边结构取法。

【教学思路与方法】

❖ 内容分析

工程结构中绝大多数都是对称结构,一般均为高次超静定结构,计算比较烦琐;对称结构在对称荷载作用下内力和位移也是对称的,可取一半结构进行计算,工作量将大大减小,因此研究对称结构的受力特点、半边结构的取法会对结构的计算带来很大的便利。此外,掌握这个方法,对于研究生入学考试、一级注册结构工程师的考试都是至关重要的。

对称结构计算的难度有些大,主要体现在半边结构的取法。对于一般简单结构取法不难,但对于一些杆件数量多的结构,半边结构的取法要考虑周全方可。

❖ 教学设计整体思路

内容回顾(力法求解超静定结构的原理和方法)→新课导入(提出问题:九州航道特大桥在结构自重作用下,半边结构如何取?)→新课展开(对称概念、利用对称性简化计算、半边结构的取法)→总结(归纳所学知识点)→拓展延伸(了解学科发展动态)→课后作业(进一步思考所学知识)→下节内容+预习要求。

❖ 主要教学方法

讲授法,思考互动法,设疑启发法,练习法,对比分析法,课堂讨论法,归纳总结法。

【教具】

电脑、投影仪、多媒体课件、板书、实例演示、动画视频。

教 学 过 程

◆ 内容回顾

力法求解超静定结构的原理和方法如图 3.44 所示。

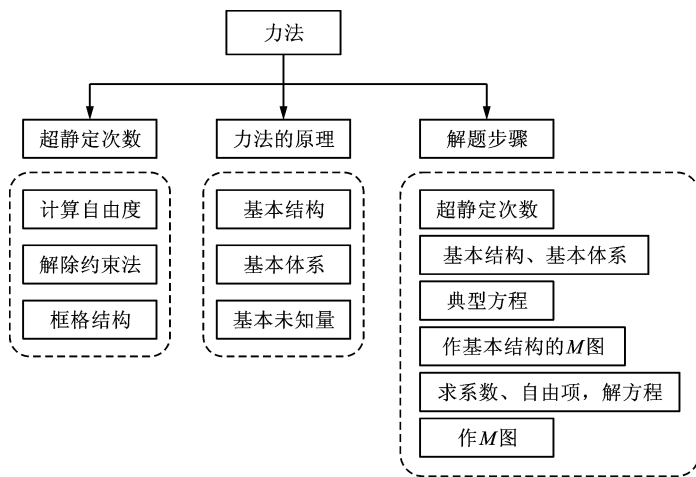


图 3.44 力法求解超静定结构的原理和方法

◆ 作业完成情况总结分析

作业评析：

- (1) 总结作业整体情况；
- (2) 分析作业中普遍存在的问题；
- (3) 对作业中的难点进行讲解。

上节课课后思考题：

- (1) 对上节课课后思考题学生网上讨论结果进行分析总结；
- (2) 对学生学习中的难点进行讲解讨论。

◆ 课堂导入

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases} \quad (\text{力法的典型方程})$$

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases}$$

方程求解复杂，要简化计算，可利用结构的对称性。对称结构在实际结构中非常常见，如图 3.45 所示。

复习巩固
温故知新
引出下文

思考互动、设问法：力法计算超静定结构需要建立力法的典型方程，典型方程的数量与多余约束的个数一致。显然随着超静定次数的增加，解题的难度主要集中在求解典型方程上。为求解方程，可将其简化处理，其中应用最为广泛的就是利用结构的对称性来简化计算。

作业点拨
查漏补缺

讲解解题思路、类似题目的分析方法和计算顺序。

分析现状 联系工程
提出问题 思政育人

对称结构在实际结构中非常常见，比如港珠澳大桥的三座通航桥、北京大兴国际机场等均为对称结构。港珠澳大桥是创造 400 多项专利、7 项世界之最的世界上最长的跨海大桥，被外国媒体称为“新世界七大奇迹”。而北京大兴国际机场于 2019 年 9 月投入使用，成为世界上最大的空港，被称为“新世界七大奇迹”之首。



图 3.45 港珠澳大桥对称结构

实际结构[港珠澳三座通航桥(见图 3.46)、北京大兴国际机场、故宫等]。实际结构绝大多数都是对称结构。港珠澳大桥是创造 400 多项专利、7 项世界之最的世界上最长的跨海大桥,被外国媒体称为“新世界七大奇迹”之首。

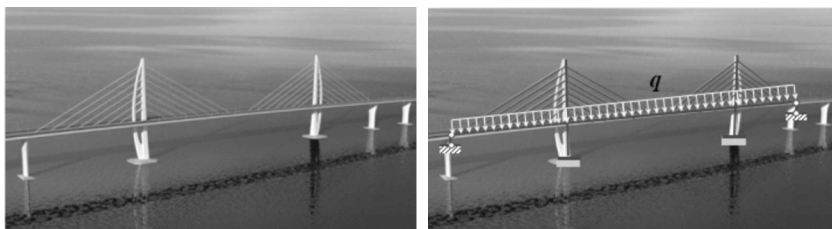


图 3.46 九州航道桥及其计算简图

【提出问题】如图 3.46 所示,九州航道大桥在结构自重作用下,半边结构如何取?

◆ 新课展开

一、对称概念

(一) 结构对称

【思考 1】对称结构应该满足哪些条件?超静定结构和静定结构对称要满足的条件是否相同?判断如图 3.47 所示结构是否为对称结构?

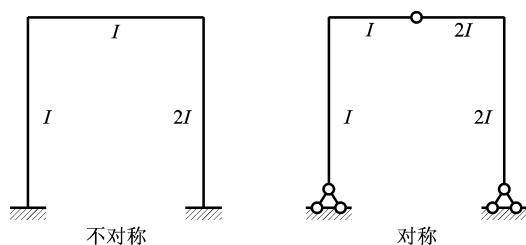


图 3.47 判断结构

★ 课程思政

港珠澳大桥是我国建设规模最大、技术最复杂、标准最高的桥梁,是我国桥梁建设水平迈入桥梁建设强国的里程碑项目。奇迹背后,是团结合作、开拓创新的精神。教师以此激发同学们奋发图强、报效祖国的爱国精神。

学习新知
启发思维
解决问题

讲授法、互动法:首先了解对称的概念。第一个是结构的对称。同学们思考下对称结构应满足哪些条件?超静定结构和静定结构对称满足的条件是否相同?图 3.47 所示结构是否为对称结构?图 3.47 所示结构中,左图不是对称结构,因为它是超静定结构,刚度不对称,不能称为对称结构;右图是静定结构,计算内力时和刚度无关,因此可按对称结构计算。

【结论】

(1) 静定结构对称：结构的几何形状和支座情况对称。

(2) 超静定结构对称：结构的几何形状和支座情况对称；杆件截面和材料(EI 、 EA)也对称。

(二) 荷载对称

【思考2】请同学们判断图 3.48 是哪一种形式的对称荷载？

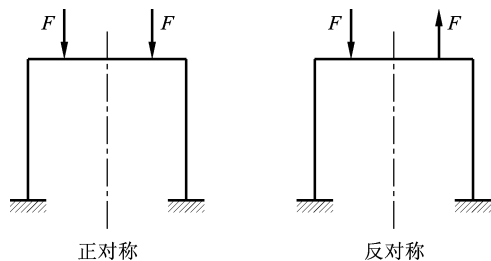


图 3.48 正对称与反对称荷载

(1) 正对称荷载：指沿结构对称轴对折后，左右两部分荷载完全重合（作用点相对应，数值相等，方向相同）。

(2) 反对称荷载：指沿结构对称轴对折后，左右两部分荷载方向相反（作用点相对应，数值相等，方向相反）。

二、利用对称性简化计算(重点)

原则：取对称的基本结构。

以三次超静定对称结构为例(见图 3.49)，说明简化过程。

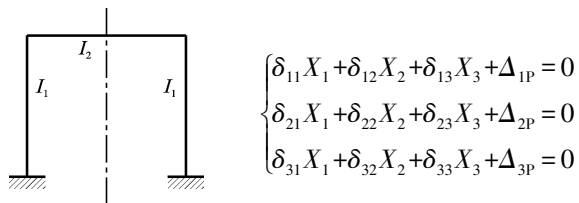


图 3.49 三次超静定对称结构及基本方程

【思考3】若利用结构的对称性可否取图 3.50 的基本结构？

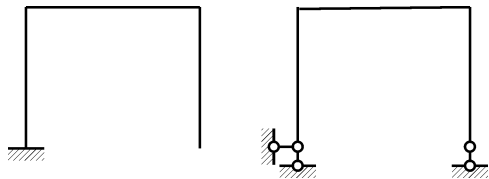


图 3.50 思考3图

【结论1】选择基本结构的原则：若要利用结构对称性，必须取对称的基本结构(见图 3.51)。

关于荷载的对称，同学们在材料力学课程中学习过。我们知道荷载的对称有两种：正对称荷载和反对称荷载。判断图 3.48 中荷载属于哪种形式的对称？左图为正对称荷载，右图为反对称荷载。注意我们在这里所说的正对称荷载和反对称荷载均指的是轴对称，还有中心对称荷载，同学们有兴趣的话可以查找相关资料。

讲授法、设疑启发法：以一个三次超静定结构为例说明简化过程。三次超静定有三个方程，其求解是比较麻烦的。如果要利用结构对称性来简化计算，有些副系数或自由项必须为零。那么基本结构如何选择呢？

如图 3.50 所示，可以选择悬臂刚架、简支刚架为基本结构吗？不能，显然这样图乘的副系数不为零。因此必须选择对称的基本结构才能达到目的。可以从横梁中间切断，选择两个悬臂刚架为基本结构，则为对称的基本结构。因此要利用对称性简化计算，最终的目的还是选择对称的基本结构。基本结构对称，则弯矩和轴力的多余约束力为正对称未知力，基本结构的 $\bar{M}_1$ 、 $\bar{M}_2$ 图必正对称；剪力的多余约束力为反对称未知力， $\bar{M}_3$ 图必为反对称弯矩图。

启发法、互动法：同学们想一想，一个正对称的 M 图和一个反对称的 M 图图乘，结果会如何？一定为零。“思考4”中哪些副系数会为零？ δ_{31} 、 δ_{13} 、 δ_{32} 、 δ_{23} 四个副系数均为零，则典型方程可得到简化。

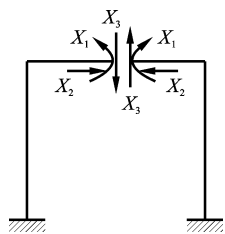


图 3.51 对称的基本结构

X_1 、 X_2 为正对称的未知力, X_3 为反对称的未知力;

$\overline{M}_1$ $\overline{M}_2$ 为正对称弯矩图, $\overline{M}_3$ 为反对称弯矩图。

【思考 4】一个正对称弯矩图与一个反对称弯矩图图乘, 会有哪种结果?

$$\delta_{31} = \delta_{13} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_3}{EI} ds = 0 \quad \delta_{32} = \delta_{23} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_3}{EI} ds = 0$$

故力法方程简化为:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases}$$

荷载正对称:

$$\Delta_{3P} = \sum \int \frac{\overline{M}_3 M_P}{EI} ds = 0 \quad X_3 = 0$$

【重要结论 1】对称结构在正对称荷载作用下, 对称轴处反对称的剪力必为零。超静定结构的 M 图正对称, 超静定结构的变形图正对称。

荷载反对称:

$$\begin{cases} \Delta_{1P} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_P}{EI} dx = 0 \\ \Delta_{2P} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 M_P}{EI} dx = 0 \end{cases}$$

【重要结论 2】对称结构在反对称荷载作用下, 对称轴处正对称的弯矩和轴力必为零。超静定结构的 M 图反对称, 超静定结构的变形图反对称。

三、半边结构的取法(重点、难点)

原则: 所取的半边结构无论是受力还是变形均与原结构相同。

【课堂讨论】如图 3.52 所示, 结构的半边结构如何取?

学习新知
启发思考

讲授法、启发法: 到目前为止, 我们只考虑了结构的对称, 还没考虑荷载的对称。若荷载正对称, 显然 M_P 图正对称, 与反对称 M 图图乘同样为零, 显然 Δ_{3P} 为零, 由第三个方程可判断 $X_3 = 0$ 。

那么这个结论是否只适用于“思考 4”中的结构呢? 是否可适用于所有的正对称荷载作用下的对称结构? 答案是肯定的。这个结论不仅适用于超静定结构, 同样也适用于静定结构。

若荷载反对称, 可得到刚好相反的结论: 对称轴处的正对称的内力必为零。

思考探究 小组合作
沟通表达 总结归纳

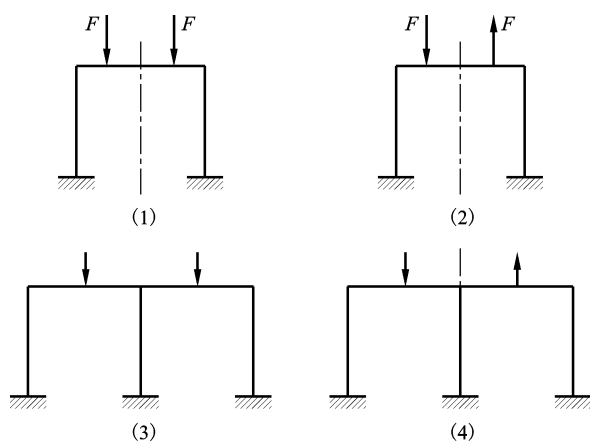


图 3.52 课堂讨论图

【分析】

(一) 奇数跨刚架正对称荷载

如图 3.53 所示。

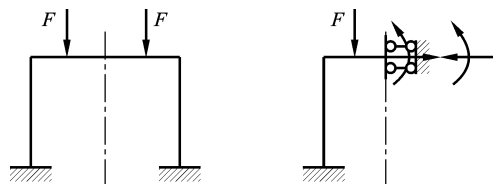


图 3.53 奇数跨刚架正对称荷载

(二) 奇数跨刚架反对称荷载

如图 3.54 所示。

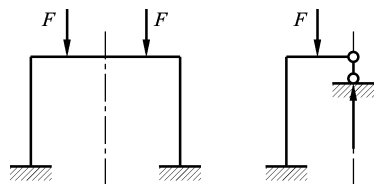


图 3.54 奇数跨刚架反对称荷载

【结论 2】对称轴处的约束力符合什么约束特点就转化成什么支座。

(三) 偶数跨刚架正对称

如图 3.55 所示。

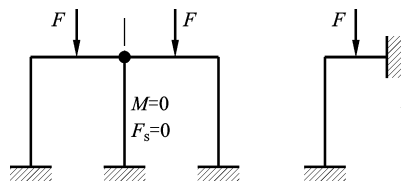


图 3.55 偶数跨刚架正对称荷载

课堂讨论法：对称结构在对称荷载作用下 M 图也是对称的，因此取半边结构来计算即可。半边结构顾名思义就是切取一半结构来计算，相当于是取一半结构代替原结构来计算，因此半边结构无论是受力还是变形均应与原结构相同。

同学们分组讨论如图 3.52 所示四个结构在正对称、反对称荷载作用下半边结构的取法。切取一半结构后，关键是切开的位置该如何处理？请同学们讨论思考。

启发法：教师引导。

方法一：观察原结构在切开的位置有哪些约束力，半边结构在切开的位置应安装一个能提供同样约束力的支座。同时要分析这样的支座是否满足原结构变形的要求。

方法二：观察原结构在切开的位置有哪些方向不能发生位移，半边结构在切开的位置应安装一个不发生相应位移的支座。同时要分析这样的支座是否满足原结构受力的要求。

归纳总结法：通过前面的分析，总结奇数跨刚架与偶数跨刚架的取法是不一样的，正对称荷载与反对称荷载的取法也是不一样的。关键是看对称轴处的位移或者约束力符合什么形式的约束特点就转化成什么形式的支座。这里只是以这些刚架为例说明半边结构的取法，其他结构的取法同学们要灵活应用。



(四) 偶数跨刚架反对称荷载

如图 3.56 所示。

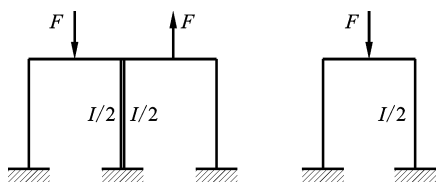


图 3.56 偶数跨刚架反对称荷载

【结论 3】对称轴处的位移符合什么约束特点就转化成什么支座。

四、半边结构取法的应用

例 1: 取图 3.57 所示结构的半边结构。

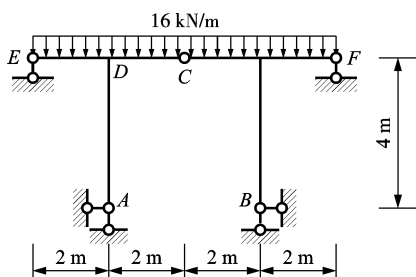


图 3.57 例 1 题图

解: 如图 3.58 所示。

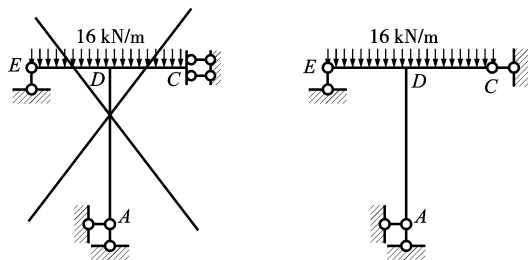


图 3.58 例 1 题解答

例 2: 取图 3.59 所示结构的半边结构。

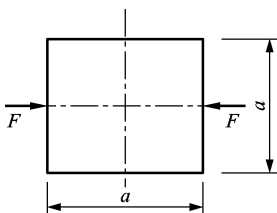


图 3.59 例 2 图

解: 如图 3.60 所示。

实战练兵
动手动脑

先练后讲法: 根据前面的学习讨论结果, 同学们可先根据自己的理解取图 3.57 所示对称结构的半边结构, 教师要观察同学们的做题情况, 及时发现易错点, 再有针对性地讲解。例 1 中正对称荷载奇数跨刚架, 因此对称轴处 C 点没有反对称的约束力, 即剪力, 若取作图半边结构对不对。不对; 为什么? 因为原结构 C 点本身就没有 M_c 。

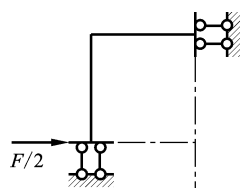


图 3.60 例 2 题解答

【解决问题】如图 3.61 所示，九州航道桥在结构自重作用下半边结构如何取？

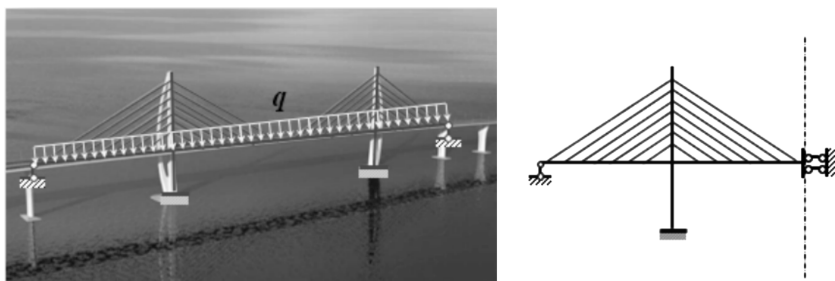


图 3.61 九州航道桥计算简图及半边结构

◆ 总结

利用对称性简化计算总结如图 3.62 所示。

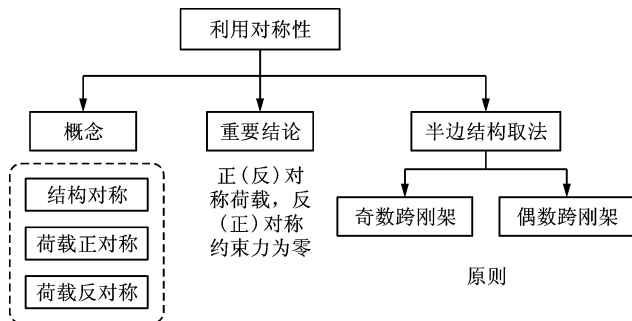


图 3.62 利用对称性简化计算总结

对称轴处的约束力符合什么约束特点就转化成什么支座；对称轴处的位移符合什么约束特点就转化成什么支座。

◆ 拓展延伸

港珠澳大桥是我国境内一座连接香港、广东珠海和澳门的桥隧工程，请同学们查阅相关资料，了解港珠澳大桥的设计、建造过程，了解大桥的整体布局、设计理念、设计特点、设计参数、文化特色，了解我国港珠澳大桥建设的难题，以及攻克难题的过程。

实践练习

掌握技巧

先练后讲法：对图 3.59 进行观察，发现有两个对称轴，那么在每一个对称轴方向上均可取半边结构，因此可以取四分之一结构进行计算。

联系工程

解决问题

总结梳理

消化巩固

总结梳理本节课的主要内容，再次强调重点、难点内容，掌握对称性求解超静定结构的简化方法。

丰富知识 拓展能力

联系工程 思政育人

★ 课程思政

了解本专业的科技前沿。请同学们查阅相关资料，了解港珠澳大桥的设计、建造过程，了解大桥的整体布局、设计理念、设计特点、设计参数、文化特色，了解我国港珠澳大桥建设的成就。学会在相关文献平台上查找所需要的文献资料，并能进行归纳整理，利用互联网的强大功能，助推知识的了解、掌握。

课后作业

【作业】教材 P176: 7-16、7-18。

【思考题】

(1) 查阅相关工程结构相关资料。为什么工程上的很多结构尽量设计成对称结构? 对称结构有哪些优点?

(2) 北京大兴国际机场(见图 3.63)工程建设难度世界少有, 其航站楼是世界最大的减隔震建筑, 建设了世界最大单块混凝土板。北京大兴国际机场创造了 40 余项国际、国内领先, 技术专利 103 项, 新工法 65 项, 国产化率达 98% 以上。大兴机场能否取半边结构计算?



图 3.63 北京大兴国际机场

下节内容+预习要求

【下节内容】

利用对称性简化计算+课堂练习(习题课): ①各种类型刚架半边结构的取法; ②通过练习题实战练兵, 巩固知识, 学会应用。

【预习要求】

①预习时间: 30 分钟; ②完成下节内容的微视频学习; ③完成教材 § 7-6 部分内容学习; ④阅读相关参考资料; ⑤做好预习笔记, 包括自己的看法和体会, 记录不懂和有疑问的地方。

课余教学

- ◆ “学银在线”教学平台资料和微视频学习;
- ◆ “学银在线”教学平台学习在线测试;
- ◆ 教学平台互动讨论、交流;
- ◆ 在线学习答疑;
- ◆ 图书馆数字资源。

板书设计

【固定板书】

固定板书如图 3.64 所示。

独立思考 自主探究
联系工程 逻辑思维

取半边结构时, 具体问题具体分析, 学会利用基本知识分析问题和解决问题。

★ 课程思政

家国情怀。以大兴机场的科技成就引导学生关注国家重大工程项目, 树立文化自信, 培育家国情怀。

课后拓展、作业、思考题均会展示在在线开放课程平台上, 请同学们及时关注, 按时完成相关作业。



7.6 对称性的利用

- 一、对称概念
- 二、简化计算
- 三、半边结构的取法
- 四、应用

图 3.64 固定板书

【机动板书】

机动板书如图 3.65 所示。

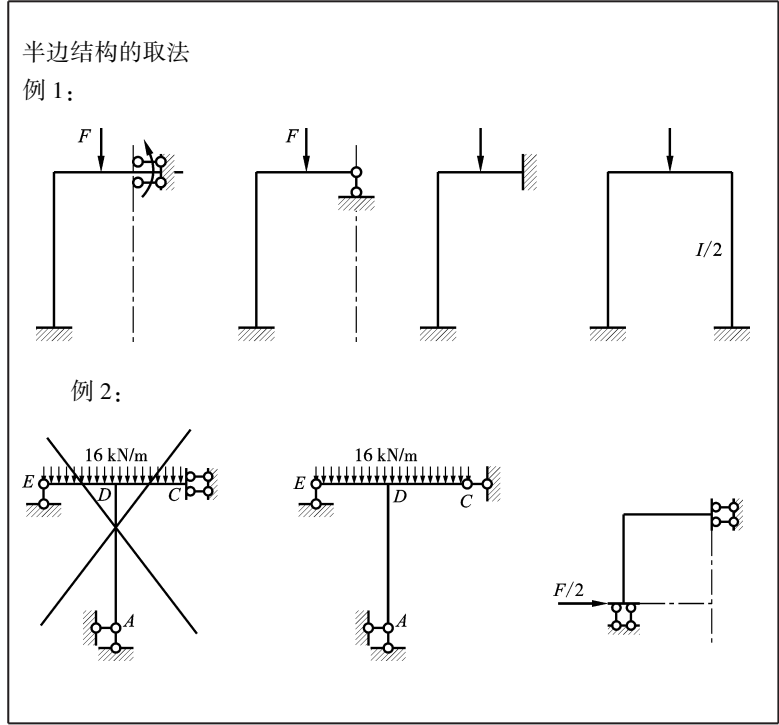


图 3.65 机动板书