

## 5.3

## 最小生成树

基本信息			
教学主题	最小生成树	课时安排	1 课时(45 分钟)
所在章节	第 7 章 图/第 7.4.3 节 最小生成树		

## ▶ 【教学目标】

## ❖ 知识目标

- (1)理解: 最小生成树的概念。
- (2)掌握: 构造最小生成树的算法及实现。
- (3)运用: 最小生成树解决实际问题。

## ❖ 能力目标

(1)提取要素: 在理解概念, 阅读教材、文献中对抽象概念的表述时, 锻炼自己提取概念关键词和要素的能力。

(2)举一反三、主动思考: 培养学生发现问题、分析问题和解决问题的能力, 针对不同的实际问题, 会灵活运用最小生成树的概念解决, 提高创新能力。

(3)逻辑思维: 学会查阅文献资料, 培养学生运用分析、比较、归纳与演绎等科学研究方法的逻辑思维能力。

## ❖ 素质目标

(1)专注、投入: 培养学生学习兴趣、良好的思维习惯、自主学习的积极性以及专注投入的学习习惯。

(2)钻研、创新: 培养学生复习+总结、预习+思考的良好学习习惯和严谨务实的学习态度, 并通过知识拓展开阔视野, 引导学生敢于创新, 提高自主探索的创新品质。

(3)积少成多: 授导学生每天学习多一点, 努力多一点, 坚持后收获就会更多。

## ▶ 【教学内容】

- (1)最小生成树的概念【重点】。
- (2)Prim 算法构造最小生成树【重点】【难点】。

## ▶ 【教学组织与教学思路】

## ❖ 教学组织

教学时间共计 45 分钟, 课堂组织从“找最经济的煤气输送网”引入, 继而介绍本次课学习目标, 在回顾上节课的知识点后, 再详细讲解最小生成树的定义、构造最小生成树的原则及 Prim 算法的思想、设计

及实现等知识点。教学课堂的活跃、学生思维的调动等环节展开。

#### ❖ 教学思路

将教学环节分为课前、课中和课后三个阶段。各阶段综合应用信息化教学法、BOPPPS 教学模式等。

(1) 课前：基于学校的教学平台，推送教学课件、MOOC 链接等进行多维度导学，使学生初步了解将要学习的内容。通过学生完成 MOOC 链接中的前测，了解学生预习情况，确定本堂课教学重点及难点。

(2) 课中：应用 BOPPPS 教学模式。

① 课堂导入。提出问题或实际案例导入。设置情境，激发学生学习兴趣。

② 温故知新。承上启下回顾知识，进行课程前测，了解学生的前期知识掌握情况。

③ 学习目标。明确本节课的学习目标和学习要求。

④ 讲授与互动。重点及难点内容详讲，辅以提问、启发、类比、讨论等方式进行互动式讲授，以期强化学习目标，活跃课堂氛围，加深内容理解，拓展认知思维。

⑤ 学以致用。课堂练习题，加入板书及学生演板等互动，以了解学情，督促学生主动参与教学过程，提升学生学习参与度。

⑥ 课程小结与课后导学。通过思维导图等总结本节主要内容，布置课后练习巩固提升，同时通过设置问题，引出下次课教学内容。

本次课通过“找最经济的煤气输送网”引入，继而回顾上节课的知识点，再介绍本次课学习目标：理解最小生成树的概念、掌握构造最小生成树的算法及实现、运用最小生成树解决实际问题。之后详细讲解最小生成树的定义、Prim 算法构造最小生成树的思想、设计及实现等知识点。

在讲授和互动环节，首先介绍最小生成树的定义。接着重点介绍 Prim 算法构造最小生成树的思想、设计及实现等。授课过程中，综合应用提问、讨论、课堂练习的方式，使学生真正理解和掌握本节学习内容。

讲授环节后，通过“学以致用”课堂测试来评价学生对知识的理解掌握情况，最后进行教学总结，归纳本节课的学习内容。

(3) 课后：练习、复习、拓展。

① 通过学校教学平台布置课后作业，作业完成后，线上批阅。

② 鼓励学生积极参与 MOOC 平台的交流与讨论。

③ 布置拓展阅读资料，鼓励学生提出挑战性或批判性问题。

## ▶ 【教学方法】

(1) 结合生活中的例子“找最经济的煤气输送网”引出本节课，针对性地分析问题和解决问题，提高学生兴趣。

(2) 采用多媒体动画的方式形象地描述 Prim 算法构造最小生成树过程，刺激学生感官，加深对构造算法的理解；同时合理地设计板书，避免 PPT 放映过快导致学习“短路”，利于学生掌握学习内容。

(3) 以问答方式进行知识点回顾，活跃课堂气氛。

(4) 采用启发式、案例式教学，上课前引导学生对线性表进行归纳总结，画出思维导图，然后让学生带着问题有针对性地学习知识点，更深层次地理解课堂所学。

(5) 进行必要的课堂小结，布置课外习题及参考资料。

(6) 采用前后呼应的方式引导学生对下一节课的兴趣点。

课堂教学思维导图如图 5.30 所示。

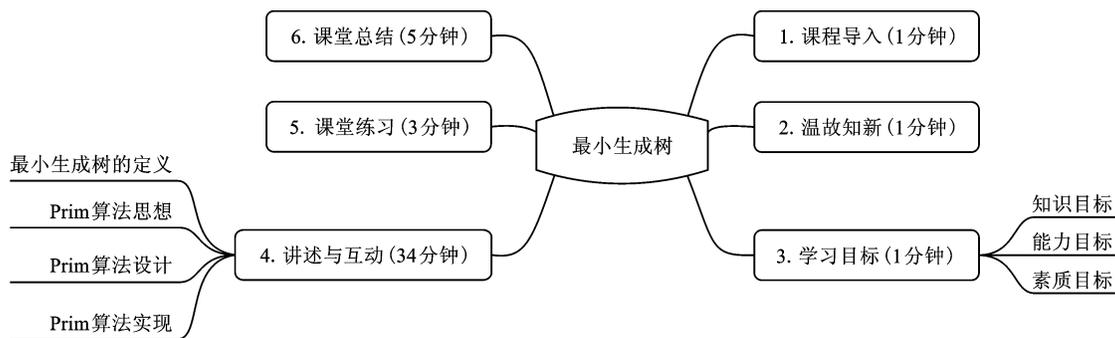


图 5.30 课堂教学思维导图

## 【课程思政】

通过 Prim 算法的分析, 让学生思考这样几个问题:

- (1) Prim 算法的本质是什么? (思政元素)
- (2) 我们能从中悟出什么道理? (融合策略)

Prim 算法加点不构成回路, 是局部最优+调整=全局最优, 局部最优就是贪心算法思想。我们也可以贪心地认为: 我们每天多学习一点, 多努力一点, 那么大学四年下来, 就一定会收获多一点。

授导学生: 平时应该多努力一点, 积少成多, 终会有所作为。

## 教 学 过 程

### ◆ 课堂导入(1分钟)

引例: 以“我最经济的煤气输送网”引入课程。

有煤气站 A, 将给居民区供应煤气, 要求设计一个最经济的煤气管道路线, 并求所需的总费用。图 5.31 所示为煤气输送网。

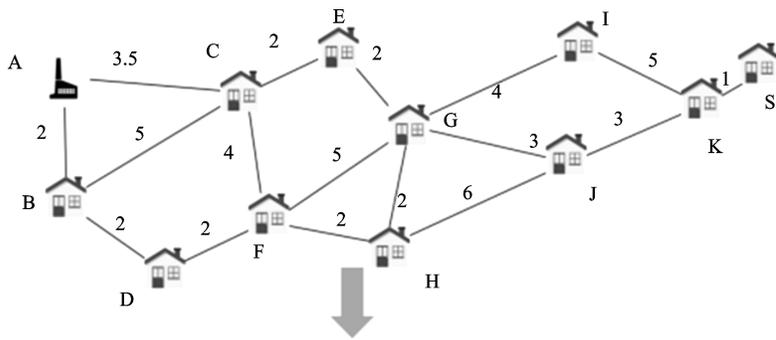


图 5.31 煤气输送网

在  $n$  个顶点的煤气管道网中, 各居民区都和煤气站相连, 找最少的边, 且边上的“值之和”最小。

按照“我最经济的煤气输送网”引入课程。

煤气输送, 需要送到居民区的所有用户, 寻最经济的方式, 及图中每个节点都要覆盖, 权值和最小。以此激发学生学习和学习动力。

## 明确目标(1分钟)

\* 本节目标

- (1)理解: 最小生成树的概念;
- (2)掌握: 构造最小生成树的算法及实现;
- (3)运用: 最小生成树解决实际问题。

提升视角, 强调本节课的学习目标。

## 重点讲解 难点分析 理论实践 虚拟演示 自主探究 (38分钟)

\* 讲授及互动

(1)什么是生成树?(1分钟)

一个连通图的生成树是一个极小连通子图, 它含有图中全部  $n$  个顶点和构成一棵树的  $(n-1)$  条边(见图 5.32)。



图 5.32 生成树

(2)最小生成树概念及原则。(2分钟)

1)最小生成树。

- ①对于带权连通图  $G$ (边上权值大于 0), 有多棵不同生成树;
- ②每棵生成树的所有边的权值之和最小的生成树, 称为图的最小生成树。

2)构造最小生成树的算法有许多, 基本原则是:

- ①尽可能选取权值最小的边, 但不能构成回路;
- ②选择  $n-1$  条边构成最小生成树。

(3)Prim 算法思想(10分钟)

Prim 算法:

1)从连通网  $N=(U, E)$  中找最小生成树  $T=(U, TE)$ 。

2)算法思想(见图 5.33)。

- ①若从顶点  $v$  出发构造,  $U=\{v\}$ ,  $TE=\{\}$ ;
  - ②先找权值最小的边  $(v, k)$ , 其中  $v \in U$  且  $k \in V-U$ , 并且子图不构成环, 则  $U=U \cup \{k\}$ ,  $TE=TE \cup \{(v, k)\}$ ;
  - ③考察  $V-U$  中所有顶点  $j$ , 修改候选边: 若  $(j, k)$  的权值小于原来和顶点  $k$  关联的候选边, 则用  $(k, j)$  取代后者作为候选边。
- } 重复  $n-1$  次

温故知新: 回顾上节课知识点(生成树概念), 承上启下, 引出本堂课的学习内容。

归纳讲述法: 通过阐述的方式, 介绍最小生成树的概念。

归纳讲述法: 阐述构造最小生成树的原则。

归纳讲述法+案例分析: 阐述 Prim 算法思想: 将顶点集合分成 2 个部分: 已标号和未标号, 选取最小权值的边, 将顶点拉进已标号的集合, 一直到所有顶点都已标号。

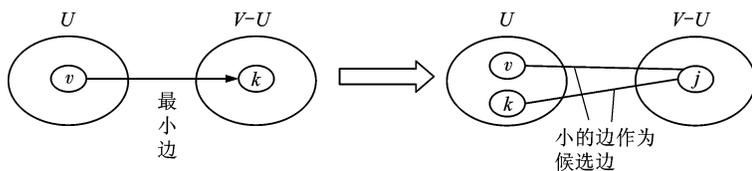


图 5-33 Prim 算法

\* 案例分析

Prim 算法示例演示(起点 0), 如图 5.34 所示。

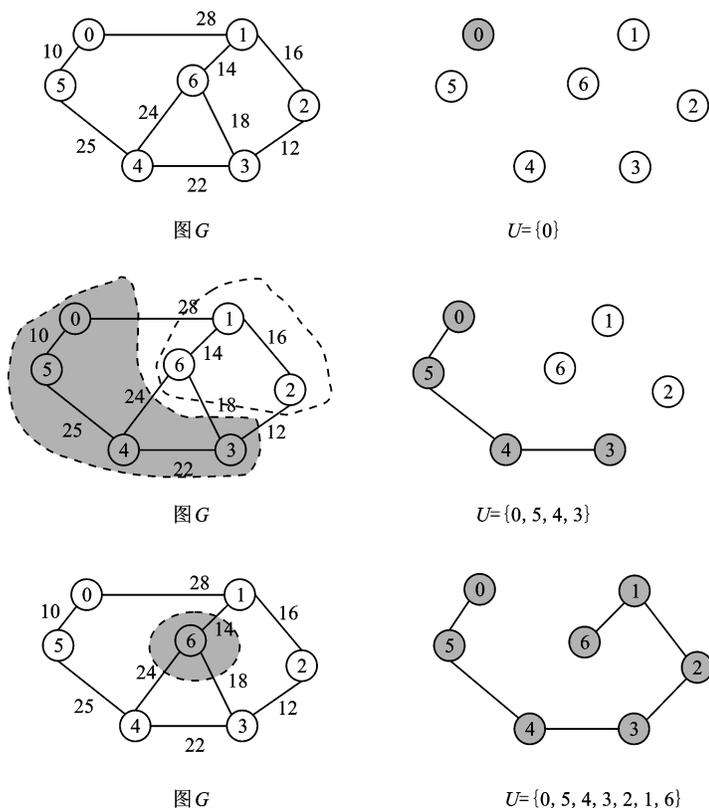


图 5.34 Prim 算法示例图

(4) Prim 算法设计。(10 分钟)

\* 提问:

①如何求  $U$ 、 $V-U$  两个顶点集之间的最小边? (只求一条)

答: 只考虑  $V-U$  中顶点  $j$  到  $U$  顶点集的最小边(无向图), 比较来找最小边。

②如何存储顶点  $j$  到  $U$  顶点集的最小边?

答: 用 `lowcost[]`、`closest[]` 两个数组存储, 如图 5.35 所示。

动画展示: 配合 PPT 动画加以引导。

(培养学生的理解力)

问题驱动(点名回答问题): 设计启发性提问加以引导, 配合 PPT 动画挖掘特征, 总结算法设计需要解决的问题。

(培养学生理解力)

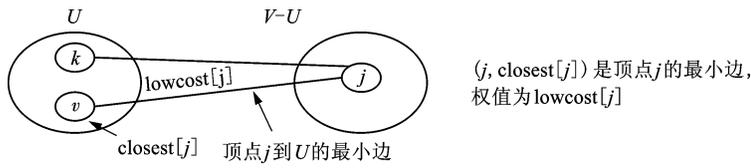


图 5.35 问题②图

③一个顶点属于哪个集合?

答: 如图 5.36 所示。

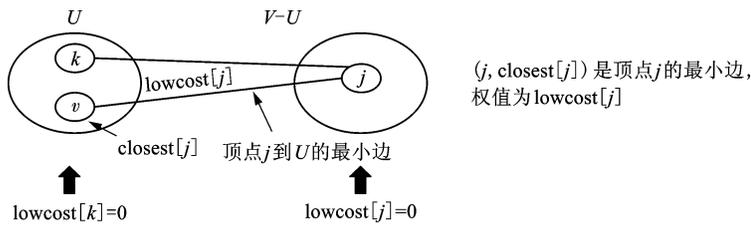


图 5.36 问题③图

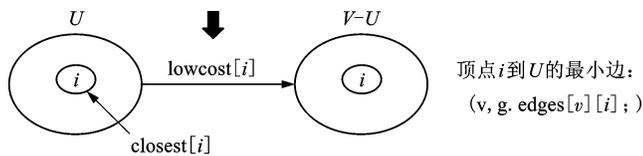
④图采用哪种存储结构更合适?

答: 图的邻接矩阵。

(5) Prim 算法实现。(10 分钟)

放映 PPT。

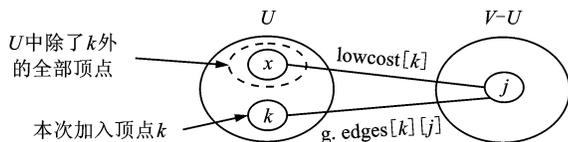
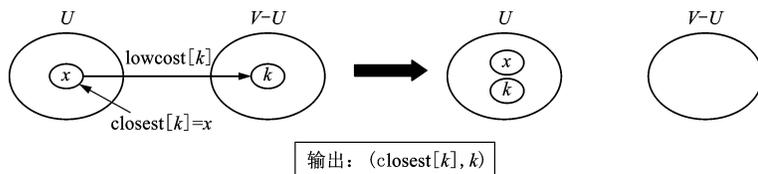
```
#define INF 32767 //INF 表示 ∞
void Prim(Mgraph g, int y) {
    int lowcost[MAXV];
    int min;
    int closest[MAXV], i, j, k;
    for (i=0; i<g.n; i++) { //给 lowcost [ ] 和
closest [ ] 置初值
        lowcost[i]=g.edges[v][i];
        closest[i]=v;
    }
}
```



代码分析+动画展示: 分模块  
阐述 Prim 算法的实现。

```

for(i=1; i<g.n; i++){ //输出(n-1)条边
    min=INF;
    for(j=0; j<g.n; i++){ //在(V-U)中找出离U
    最近的顶点 k
        if (lowcost [ j]! = 0&&lowcost [ j] <
min)] {
            min=lowcost[j];
            k=j;          //k 记录最近顶点编号
        }
        printf("边(% d, % d)权为: % d\n", closest
[k], k, min);
        lowcost[k]=0;    //标记 k 已经加
入 U
    
```



```

for(j=0; j<g.n; j++) //修改数组 lowcost 和 closest
if(lowcost[j]!=0&&g.edges[k][j] < lowcost[j]) {
    lowcost[j]=g.edges[k][j];
    closest[j]=k;
}
}
}

```

仅仅考虑V-U中的顶点

(6) Prim 算法本质及分析。(2 分钟)

Prim 算法本质: 加点不构成回路, 如图 5.37 所示。

问题驱动+动画展示(点名学生回答问题): 阐述过程中设计启发性提问加以引导, 配合 PPT 动画进行。

归纳讲授法: 剖析 Prim 算法的本质: 加点不构成回路, 且算法是局部最优+调整=全局最优, 而局部最优是贪心思想, 因此得到课程思政要点。

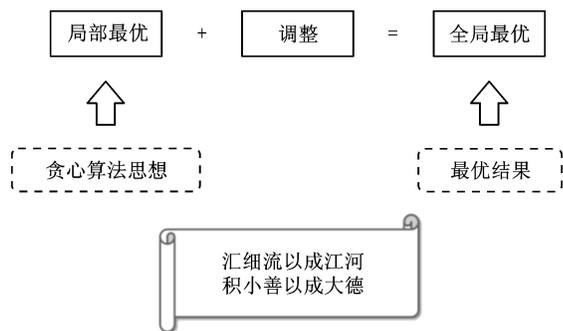


图 5.37 Prim 算法本质

(7) 学以致用。(3 分钟)

【例题】煤气站 A 给一居民区供应煤气，要求设计一个最经济的煤气管道路线，并求所需的总费用。

【解答】

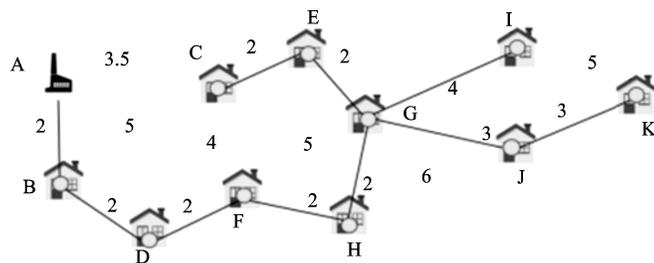


图 5.38 解答图

此即为最经济的煤气管道路线，所需的总费用为 25 万元。

### ◆ 课堂总结 课后拓展 预习提示(5 分钟)

#### ★ 课堂总结

归纳本节课的重点内容：

- (1) 最小生成树定义；
  - (2) Prim 算法构造最小生成树的思想；
  - (3) Prim 算法构造最小生成树的设计及要解决的问题。
- 思维导图如图 5.39 所示。

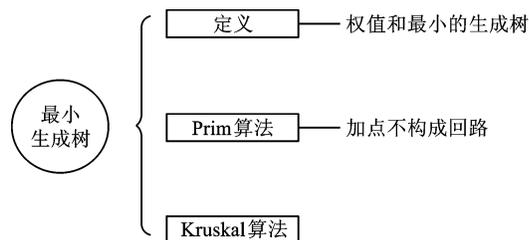


图 5.39 思维导图

#### ★ 课程思政

我们可以贪心地认为：每天多学习一点，多努力一点，那么大学四年下来，就一定会收获多一点。平时多努力一些，积少成多，终究有所收获。  
授导学生：汇细流以成江河，积小善以成大德。

#### PPT 演示+互动

学以致用：将课堂所学运用到练习中。

PPT 演示+互动：运用思维导图对本节课知识内容进行总结。

★ 课后导学

【作业】按照最小生成树的不能构成圈、权值和最小, 还有哪些途径(除 Prim 算法)可以求最小生成树?

【拓展】研读科研文献(全文已发 QQ 群), 欢迎学生在线上平台随时与老师讨论。

Frieze A, Tkocz T. A weighted minimum spanning tree with a random cost constraint[J]. Proceedings of the Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 2020: 670-689.

【预习】Kruskal 算法构造最小生成树。



课外思考题



学习反馈

【附：板书设计】

板书设计如图 5.40 所示。



图 5.40 板书设计

课后导学: 包括三个部分, 即作业、拓展及预习工作。

通过课后作业, 巩固课堂所学, 拓展文献阅读, 引导学生自主学习, 加深对最小生成树的理解, 并综合应用、积极创新。

通过预习提示, 提示下节课的学习内容。

作业及思考题扫描二维码完成。

同时, 学生可以对本节课进行评价反馈, 老师用以修正教学。

教 学 后 记

(1) 课程通过中国大学 MOOC 预习了解学情, 课堂上启发学生独立分析问题、解决问题, 同时通过大量的图片、动画有效地化解本堂课难点。

(2) 课堂上设计很多提问与学生互动, 有些问题比较简单, 有些问题具有一定难度, 培养学生独立思考、融会贯通的学习能力。Prim 算法加点不构成回路, 是局部最优+调整=全局最优, 局部最优就是贪心算法思想。我们也可以贪心地认为: 我们每天多学习一点, 多努力一点, 那么大学四年下来, 就一定会收获多一点。授导学生: 平时应该多努力一点, 积少成多, 终究有所收获。汇细流以成江河, 积小善以成大德。

(3) 考虑适当增加难度大的例题。