

4.4.4* 求指派问题多重最优解的分枝定界法

在实际应用中, 优化问题的多重最优解具有非常重要的作用. 用单纯形法解线性规划问题, 以及用表上作业法解运输问题时, 若问题存在多重最优解, 则都能用专门的方法求出来. 但求解指派问题的匈牙利法以及其他方法, 都未论述如何求指派问题的多重最优解, 国内外其他文献中也仅提及指派问题有时存在多重最优解, 并以简单的例子说明, 而对于求多重最优解的一般方法却未有论述. Murty Katta 曾提出一种按照其目标函数值从小到大的顺序, 求解指派问题的算法. 下面以此算法中的思想为基础, 讨论求指派问题多重最优解的一种分枝定界算法.

(1) 问题的分析

由匈牙利法知, 从系数矩阵 (c_{ij}) 的各行(列)中分别减去各该行(列)最小元素后, 得新矩阵 (b_{ij}) . 若矩阵 (b_{ij}) 中的 n 个不同行不同列的零元素, 即有 $(1, 2, \dots, n)$ 的一个排列 $(j_1, \dots, j_n)$ 使 $b_{1j_1} = \dots = b_{nj_n} = 0$, 则 $x_{1j_1} = \dots = x_{nj_n} = 1$, 其余 $x_{ij} = 0$, 就为该指派问题的最优解. 显然, 若存在 $(1, 2, \dots, n)$ 的多个排列 $(j_1, \dots, j_n)$ 使 $b_{1j_1} = \dots = b_{nj_n} = 0$, 即在挑选位于不同行不同列的零元素过程中遇到有多种选择时, 该指派问题有多重最优解.

指派问题的一个可行解为多重最优解的条件是: ①该解所对应的目标函数值与最优解的相同; ②该解中至少有一个变量的取值与已求出的最优解不同.

为方便问题的讨论, 设有 $X = \{x_{1j_1}, \dots, x_{nj_n}\}$ 表示指派问题的一组可行解, 其中每个变量的取值均为1; $j_1, \dots, j_n$ 为 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 其他未列的变量的取值均为0. 若预先指定某变量 $x_{ij} = 0$, 则约定用 $\bar{x}_{ij}$ 表示并列入其中.

若预先指定 $x_{i_1j_1} = \dots = x_{i_rj_r} = 1$, $\bar{x}_{m_1p_1} = \dots = \bar{x}_{m_1p_1} = 0$, 即

$$B = \{x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_rj_r}; \bar{x}_{m_1p_1}, \dots, \bar{x}_{m_1p_1}\},$$

并相应地从系数矩阵 C 中划掉第 $i_1, \dots, i_r$ 行和第 $j_1, \dots, j_r$ 列, 以及用 ∞ (或很大的正数) 代替 C 中的元素 $(m_1, p_1), \dots, (m_1, p_1)$, 便可得到一个子系数矩阵 C_B . 解以 C_B 为系数矩阵的指派问题, 设该子问题的最优解为 $\{x_{t_1s_1}, \dots, x_{t_{n-r}s_{n-r}}\}$, 显然

$$X_B = B \cup \{x_{t_1s_1}, \dots, x_{t_{n-r}s_{n-r}}\} = \{x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_rj_r}; \bar{x}_{m_1p_1}, \dots, \bar{x}_{m_1p_1}; x_{t_1s_1}, \dots, x_{t_{n-r}s_{n-r}}\}$$

是原问题的一组可行解.

对于解 X_B , 可以分出如下 $(n-r-1)$ 个互不相同的分枝:

$$B_1 = \{x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_rj_r}; \bar{x}_{m_1p_1}, \dots, \bar{x}_{m_1p_1}; \bar{x}_{t_1s_1}\},$$

$$B_2 = \{x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_rj_r}, \bar{x}_{m_1p_1}, \dots, \bar{x}_{m_1p_1}; x_{t_1s_1}, \bar{x}_{t_2s_2}\},$$

...

$$B_{n-r-1} = \{x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_rj_r}; \bar{x}_{m_1p_1}, \dots, \bar{x}_{m_1p_1}; x_{t_1s_1}, \dots, x_{t_{n-r-2}s_{n-r-2}}, \bar{x}_{t_{n-r-1}s_{n-r-1}}\}.$$

其中 $\{\cdot\}$ 中为预先指定取值的变量. 类似地, 用上述方法, 可对每一分枝求出一组对应于原问题的可行解, 称这个解为该分枝的解. 这些解中, 均有 $x_{i_1j_1} = \dots = x_{i_rj_r} = 1$; $x_{m_1p_1} = \dots = x_{m_1p_1} = 0$. 但相互间至少有一个变量的取值不同, 即 $x_{t_1s_1} = 0$ 或 $x_{t_1s_1} = 1$; $x_{t_1s_1} = 1$, 但 $x_{t_2s_2} = 0$ 或 $x_{t_2s_2} = 1$; 依此类推. 此外, 这些解的目标函数值必大于或等于解 X_B 的目标函数值.

(2)算法

算法思想：首先用匈牙利法求出原指派问题的一组最优解，然后对该解进行分枝，并对每个分枝求解。若存在某些分枝的解的目标函数值与所求出的最优解目标函数值相同，则说明求出了新的最优解。继续对新的最优解分枝，直到求不出新的最优解为止。

一般地，对于给定的指派问题系数矩阵 $C = (c_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$, 当 $m = n$ 时，称该问题为标准指派问题，否则称为非标准指派问题。对于非标准指派问题，总可以转化为标准指派问题来求解。但对于求多重最优解而言，当 $m < n$ 时，实际上只有前 m 个“人”的不同指派组合是有意义的。因此，提出如下求指派问题多重最优解的算法：

步骤一：不预先指定任何变量的取值，求原指派问题的一组最优解。设该解为

$$X(1) = \{x_{1j_1}, \dots, x_{mj_n}\},$$

其相应的目标函数值为 Z 。置 $k = 1$, $LIST$ 为空集。

步骤二：对最优解 $X(1)$ 进行分枝：

$$B_1 = \{\bar{x}_{1j_1}\},$$

$$B_2 = \{x_{1j_1}; \bar{x}_{2j_2}\},$$

$$B_r = \{x_{1j_1}, \dots, x_{r-1, j_{r-1}}; \bar{x}_{rj_r}\}, \text{ 若 } m < n, r = m; \text{ 否则 } r = n - 1.$$

对每一分枝进行求解。若某分枝的解的目标函数值等于 Z ，该解就为一组新的最优解。将该解，连同该解中那些被预先指定其取值的变量的信息一起，放入 $LIST$ 中。若无一分枝的解的目标函数值等于 Z ，则该问题无多重最优解，停止。

步骤三：置 $k = k + 1$ ，从 $LIST$ 中任取出一组最优解，记该解为 $X(k)$ ，且

$$X(k) = \{x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_rj_r}; \bar{x}_{m_1p_1}, \dots, \bar{x}_{m_1p_1}; x_{t_1s_1}, \dots, x_{t_{n-r}s_{n-r}}\},$$

其中 $\{x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_rj_r}; \bar{x}_{m_1p_1}, \dots, \bar{x}_{m_1p_1}\}$ 为预先指定的变量取值。对最优解 $X(k)$ 进行分枝：

$$B_1 = \{x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_rj_r}; \bar{x}_{m_1p_1}, \dots, \bar{x}_{m_1p_1}; \bar{x}_{t_1s_1}\},$$

$$B_2 = \{x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_rj_r}; \bar{x}_{m_1p_1}, \dots, \bar{x}_{m_1p_1}; x_{t_1s_1} \bar{x}_{t_2s_2}\},$$

...

$B_{q-r} = \{x_{i_1j_1}, \dots, x_{i_rj_r}; \bar{x}_{m_1p_1}, \dots, \bar{x}_{m_1p_1}; x_{t_1s_1}, \dots, x_{t_{q-r-1}s_{q-r-1}}, \bar{x}_{t_{q-r}s_{q-r}}\}$ ，若 $m < n, q = m$ ；否则 $q = n - 1$ 。

对每一分枝进行求解，凡某分枝的解的目标函数值等于 Z 者均为一组新的最优解。将这些新的最优解，连同解中那些被预先指定其取值的变量的信息一起，放入 $LIST$ 中。

步骤四：若 $LIST$ 变为空集，即再无新的最优解可供进一步分枝，说明多重最优解已全部求出，分别为 $X(1), X(2), \dots, X(k)$ ，共 k 个。否则，返回步骤三。

在对一新的最优解分枝之前，也可根据该最优解所对应的子问题是否存在多重解来决定有无必要往下分枝，若存在，则分枝；否则不必再分枝。

用匈牙利法求解指派问题时，其算法复杂性为 $O(n^3)$ 。对指派问题的任何一组最优解，最多只能分出 $(n - 1)$ 个枝。于是步骤二和步骤三的每一次循环，最多要求解 $(n - 1)$ 个指派问题，每个问题的规模依次为 $n, n - 1, \dots, 3, 2$ 。因此，当步骤一~步骤三均用匈牙利法解相应的指派问题时，若原问题存在 k 个多重最优解，则上述求多重最优解算法的复杂性为 $O(kn^4)$ 。

例 4.11 求如下指派问题的多重最优解.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

首先, 用匈牙利法求出该问题的一组最优解为

$$X(1) = \{x_{12}, x_{23}, x_{36}, x_{44}, x_{55}, x_{61}\}, \text{ 目标函数值 } Z = 0.$$

对 $X(1)$ 进行分枝, 并对每个分枝求解, 得

$$B_1 = \{\bar{x}_{12}\}, Z_{B_1} = 0, X(2) = \{\bar{x}_{12}; x_{13}, x_{25}, x_{32}, x_{46}, x_{54}, x_{61}\},$$

$$B_2 = \{x_{12}, \bar{x}_{23}\}, Z_{B_2} = 0, X(3) = \{x_{12}, \bar{x}_{23}; x_{25}, x_{31}, x_{46}, x_{54}, x_{63}\},$$

$$B_3 = \{x_{12}, x_{23}, \bar{x}_{36}\}, Z_{B_3} = 0, X(4) = \{x_{12}, x_{23}, \bar{x}_{36}; x_{35}, x_{46}, x_{54}, x_{61}\},$$

$$B_4 = \{x_{12}, x_{23}, x_{36}, \bar{x}_{44}\}, Z_{B_4} = 3,$$

$$B_5 = \{x_{12}, x_{23}, x_{36}, x_{44}, \bar{x}_{55}\}, Z_{B_5} = 3.$$

可见, 在 B_1, B_2 和 B_3 三分枝上得到了新的最优解. 分别对它们继续分枝, 在 B_2 的一个分枝上再求得一个最优解, $X(5) = \{x_{12}, \bar{x}_{23}; x_{25}; \bar{x}_{31}; x_{36}, x_{43}, x_{54}, x_{61}\}$. 再对该解分枝时, 未能得到新的最优解. 因此, 该问题共有 5 组最优解.

4.5* 变量有上界限制的运输问题

前面所讨论的运输问题均可称为经典运输问题. 在实际工作中, 由于种种原因, 各产销地间的运输能力(容量)往往是有限的, 如产地 A_i 至销地 B_j 最多只能运送 d_{ij} 单位. 这样, 在求调运方案时, x_{ij} 的取值就必须满足这个上界 d_{ij} 的要求. 于是就出现了变量有上界限制的运输问题, 其数学模型的一般形式为

$$\text{Min} S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{满足} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} \quad \left(\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \right)$$

对于变量有上界限制的运输问题, 可用以表上作业法为基础的原始算法和对偶算法求解. 下面介绍对偶算法.

对于给定的变量有上界限制的运输问题(原问题), 若将其中的上界限制 $x_{ij} \leq d_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ 去掉, 可得到一个相应的经典运输问题, 称这个经典运输问题为原问题的相伴运输问题.

在经典运输问题的可行解中, 非基变量的取值总是 0. 而在变量有上界限制的运输问题

中, 非基变量 x_{ij} 的取值可能为 0, 也可能等于其相应的上界 d_{ij} . 称 $x_{ij} = 0$ 的非基变量为第 I 类非基变量, $x_{ij} = d_{ij}$ 的非基变量为第 II 类非基变量.

对于变量有上界限制的运输问题的一组基本可行解而言, 若所有非基变量的检验数满足

$$\begin{aligned} c_{ij} - (u_i + v_j) &\geq 0, \text{ 当 } x_{ij} = 0 \\ c_{ij} - (u_i + v_j) &\leq 0, \text{ 当 } x_{ij} = d_{ij} \end{aligned}$$

则该基本可行解一定是最优解.

现给出对偶算法的步骤如下:

(1) 不考虑上界限制, 用表上作业法求其相伴运输问题的最优解(对应于该解的非基变量必然为第 I 类非基变量).

(2) 若该解满足原问题的变量上界限制, 即 $0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$, 则转入步骤(8), 否则用位势法求出各检验数后转入步骤(3).

(3) 若有某基变量 $x_{st} > d_{st}$, 则转入步骤(4); 若有 $x_{st} < 0$, 则转入步骤(6).

(4) 取某个满足下列三个条件的第 I 类非基变量 x_{kl} :

- ① 使存在一条除 x_{kl} 外全是基变量的闭回路且包含 x_{st} .
- ② (s, t) 是从格子 (k, l) 出发的闭回路中的偶顶点.
- ③ x_{kl} 是满足①和②的所有第 I 类非基变量中检验数最小者(有多个时任取一个).

(5) 在以 x_{kl} 为起点且包含 x_{st} 的闭回路中, 以 $x_{st} - d_{st}$ 为调整量进行调整. x_{kl} 为闭回路中的第 1 个顶点加上调整量, 余下的依次按偶顶点减去调整量, 奇顶点加上调整量进行调整(从而有 $x_{kl} = x_{st} - d_{st}$ 变为基变量, $x_{st} = d_{st}$ 变为第 II 类非基变量), 于是得到一组新解, 返回步骤(2).

(6) 取某个满足下列三个条件的第 II 类非基变量 x_{kl} :

- ① 使存在一条除 x_{kl} 外全是基变量的闭回路且包含 x_{st} .
- ② (s, t) 是从格子 (k, l) 出发的闭回路中的奇顶点.
- ③ x_{kl} 是满足①和②的所有第 II 类非基变量中检验数最大者(有多个时任取一个).

(7) 在以 x_{kl} 为起点且包含 x_{st} 的闭回路中, 以 $-x_{st}$ 为调整量进行调整. x_{kl} 为闭回路中的第 1 个顶点加上调整量, 余下的依次按偶顶点减去调整量, 奇顶点加上调整量进行调整(从而有 $x_{kl} = d_{kl} + (-x_{st})$ 变为基变量, $x_{st} = x_{st} + (-x_{st}) = 0$ 变为第 I 类非基变量), 于是得到一组新解, 返回步骤(2).

(8) 这时已得出原问题的最优解, 算出总运费, 停止.

例 4.12 设有一个变量有上界限制的运输问题如表 4-36 所示. 其中格子中左边的数字表示单位运价, 右边的数字表示变量上界. 求该问题的最优解.

表 4-36

销地 产地	B_1		B_2		B_3		B_4		产量
A_1	3	3	11	4	3	3	12	5	7
A_2	1	3	9	5	2	2	8	2	4
A_3	7	6	4	5	10	3	5	2	9
销 量	3		6		5		6		

解 首先,用表上作业法求得其相伴运输问题的最优解如表 4-37 所示.

表 4-37

销地 产地		3 B_1	9 B_2	3 B_3	10 B_4	产量
0	A_1	3 ② 3	11 2 4	3 ⑤ 3	12 2 5	7
-2	A_2	1 ① 3	9 2 5	2 1 2	8 ③ 2	4
-5	A_3	7 9 6	4 ⑥ 5	10 12 3	5 ③ 2	9
销 量		3	6	5	6	

表 4-37 中,最左一列和最顶一行分别是行位势和列位势.位于格子正中间画圈的数字表示基变量的取值,不画圈的数字表示第 I 类非基变量的检验数.不难看出该解不满足原问题的变量上界限制,故继续迭代.取格子(2,3)为起点做闭回路,如表 4-37 中虚线所示,得调整量为 $5 - 3 = 2$,调整后得表 4-38.

表 4-38

销地 产地		3 B_1	9 B_2	4 B_3	10 B_4	产量
0	A_1	3 ④ 3	11 2 4	3 (3) 3	12 2 5	7
-2	A_2	1 ① 3	9 2 5	2 ② 2	8 ③ 2	4
-5	A_3	7 9 6	4 ⑥ 5	10 12 3	5 ③ 2	9
销 量		3	6	5	6	

表 4-38 中带括号的数字表示第 II 类非基变量的取值.这时仍不是可行解,经过一共 6 次调整后得到表 4-39,这时已是可行解,同时也就是原问题的最优解,总运费 $Z = 111$.

表 4-39

销地 产地		3 B_1	11 B_2	4 B_3	12 B_4	产量
0	A_1	3 ① 3	11 ① 4	3 (3) 3	12 ② 5	7
-2	A_2	1 0 3	9 ① 5	2 ② 2	8 (2) 2	4
4	A_3	7 ② 6	4 (5) 5	10 2 3	5 (2) 2	9
销 量		3	6	5	6	

4.6* 运输问题的灵敏度分析

4.6.1 运输问题的边际值及其应用

我们已经知道,对于给定的经典运输问题,可用表上作业法求出使总运费最小的最优解(最优调动方案).但在实际工作中,我们所处理的是未来的问题.因此,如果运输路径、运输方式以及其他运杂费变化时, c_{ij} 值就会变动;而 a_i 和 b_j 则往往会根据实际的供给能力和市场的需求情况做一些调整.问题是当这些系数中的一个或几个发生变化时,已求得的最优解会怎样变化,或者是这些系数在什么范围内变化时,运输问题的最优解不变;若最优解变化,如何用最简便的方法找到新的最优解.这就是运输问题的灵敏度分析要研究和回答的主要问题.

更为有趣的是,有些经典运输问题,求出最优解后,在一定条件下,通过适当增加产销量,并仍按所求出的最佳运输路径调运反而会得到一个总运费更少的运输方案,出现“多运了物资运费反而减少”的奇怪现象,即所谓的运输问题“悖论”.这个有着明显实际意义的问题,引起了学术界的广泛重视,并提出了解决问题及其相关问题的多种方法.本节将主要介绍以传统的表上作业法为基础的求解方法.

由前面的讨论可知,经典运输问题的一般形式为

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{满足} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad i=1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad j=1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \left(\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \right) \end{aligned}$$

设 $X = \{x_{ij}\}$ 是此问题的一组基本可行解,而 $u_1, u_2, \dots, u_m; v_1, v_2, \dots, v_n$ 是与这基本可行解对应的位势.由位势法可知,对于每一个非基变量 x_{ij} ,它对应的检验数 λ_{ij} 为

$$\lambda_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

若所有的检验数 λ_{ij} 满足

$$\lambda_{ij} \geq 0$$

则当前的基本可行解 $X = \{x_{ij}\}$ 就为最优解.

定理 4.5 对经典运输问题非退化的最优解 $X = \{x_{ij}\}$ 而言,对一切的 i 和 j ,在保持当前最优基变量不变的情况下,位势和 $u_i + v_j = Q_{ij}$ 表示产地 A_i 的产量 a_i 及销地 B_j 的销量 b_j 同时变动一单位而使总运费变动的数字.

证明 ①若 x_{ij} 为基变量,则 $u_i + v_j = Q_{ij} = c_{ij}$. a_i 及 b_j 同时变动时,只能引起 x_{ij} 取值的变动,运量每变动一单位,运费变动 $c_{ij} = Q_{ij}$.

a_i 及 b_j 同时增加时, x_{ij} 的取值会随着增加,最优基变量不变.故易得

$$\Delta_{ij} < \infty$$

a_i 及 b_j 同时减少时, x_{ij} 的取值会随之减少. 当 a_i 及 b_j 减少到某一程度时, x_{ij} 取值就会等于 0. a_i 和 b_j 再稍减少一点, x_{ij} 将取负值, 违反非负约束. 由此得

$$\Delta_{ij} \geq -x_{ij}$$

综上所述, 在保持当前最优基变量不变的情况下, a_i 和 b_j 可同时变动的最大范围为

$$-x_{ij} \leq \Delta_{ij} < \infty$$

②若 x_{ij} 为非基变量, a_i 和 b_j 的同时变动所引起的基变量取值的变动, 只能在以空格 (i, j) 为起点的唯一的闭回路中去调整, 见 [14] 和 [15]. 设空格 (i, j) 的闭回路为

$$(i, j) \rightarrow (i, j_1) \rightarrow (i_1, j_1) \rightarrow \cdots \rightarrow (i_k, j_k) \rightarrow (i_k, j)$$

将其中的空格 (i, j) 除去, 便得一条路

$$P: (i, j_1) \rightarrow (i_1, j_1) \rightarrow \cdots \rightarrow (i_k, j_k) \rightarrow (i_k, j)$$

称 P 为空格 (i, j) 的路. 显然, 它有 $2k+1$ 个顶点 (基变量). 将该路上的顶点排队, (i, j_1) 是第一个, (i_1, j_1) 是第二个, 依此类推. 若 a_i 和 b_j 同时增加 (减少) 一单位, 则 P 中的奇顶点增加 (减少) 一单位运量, 偶顶点减少 (增加) 一单位运量, 就可使产销保持平衡. 方案经调整后, 总运费变为

$$\begin{aligned} Z' &= Z + (\pm c_{ij_1} \mp c_{i_1j_1} \pm \cdots \mp c_{i_kj_k} \pm c_{i_kj}) \\ &= Z + [\pm(u_i + v_{j_1}) \mp (u_{i_1} + v_{j_1}) \pm \cdots \mp (u_{i_k} + v_{j_k}) \pm (u_{i_k} + v_j)] \\ &= Z \pm (u_i + v_j) = Z + Q_{ij} \end{aligned}$$

当 a_i 及 b_j 增加 (减少) 到某一程度时, 某一个偶 (奇) 顶点基变量的取值就会等于 0. a_i 及 b_j 再稍增加 (减少) 一点, 这个基变量将取负值, 违反非负约束. 由此得在保持当前最优基变量不变的情况下, a_i 和 b_j 可同时变动的最大范围为

$$-\min_{\text{对 } P \text{ 中的奇顶点}} \{x_{ij_1}, \cdots, x_{i_kj_k}\} \leq \Delta_{ij} \leq -\min_{\text{对 } P \text{ 中的偶顶点}} \{x_{i_1j_1}, \cdots, x_{i_kj_k}\}$$

由于运输问题中大量存在退化现象, 因而将定理 4.5 推广到退化情形是很有必要的.

推论 4.1 对经典运输问题退化的最优解 $X = \{x_{ij}\}$ 而言, 若某一基变量 $x_{ij} = 0$, 且当 a_i 和 b_j 同时增加时, 定理 4.5 的结论成立; 若某一基变量 $x_{ij} > 0$, 则当 a_i 和 b_j 同时增减时, 定理 4.5 的结论都成立.

推论 4.2 对经典运输问题退化的最优解 $X = \{x_{ij}\}$ 而言, 对任一非基变量 x_{ij} , 当空格 (i, j) 的路 P 中的偶 (奇) 顶点基变量取值均大于零且 a_i 和 b_j 同时增加 (减少) 时, 定理 4.5 的结论成立.

定义 4.1 称位势和 $u_i + v_j = Q_{ij}$ 为经典运输问题中产地 A_i 与销地 B_j 的边际值.

众所周知, 运输问题是线性规划问题的一种特殊形式, 因而其边际值 Q_{ij} 的经济意义, 实际上类似于一般线性规划问题边际值 (机会费用) 的经济意义. 但是, 由于运输问题结构上的特殊性, 其边际值 Q_{ij} 的应用也就相应地有它的特别之处. 论述如下.

1. 不合理产量布局的差别及合理产量布局的制定

在各产销量 a_i , b_j 和各产销地之间单位运价 c_{ij} 既定的情况下, 用表上作业法可求出使总运费最小的物资调运方案. 但是, 对于既定的各销量 b_j 和单位运价 c_{ij} 而言, 当前产销系统中是否存在不合理的产量布局, 应如何调整 (假设条件允许) 才能使总运费进一步减少呢?

定理 4.6 对经典运输问题的最优解 $X = \{x_{ij}\}$ 而言, 当前产销系统中存在不合理产量布

局的充要条件是, 存在这样的空格 (i, j) , 在 (i, j) 的闭回路

$$(i, j) \rightarrow (i, j_1) \rightarrow (i_1, j_1) \rightarrow \cdots \rightarrow (i_k, j_k) \rightarrow (i_k, j)$$

上, 有

$$Q_{ij} < Q_{i_jj} = c_{i_jj}$$

且 (i, j) 的路 P 中的偶顶点基变量的取值均大于零; 或者有

$$Q_{ij} > Q_{i_jj} = c_{i_jj},$$

且 (i, j) 的路 P 中的奇顶点基变量的取值均大于零.

证明 充分性: ① $Q_{ij} < Q_{i_jj}$ 时, 由定理 4.5 知, a_i 与 b_j 同时增加一单位, 总运费将增加 Q_{ij} , 而 a_{i_k} 与 b_j 同时减少一单位, 总运费将减少 Q_{i_jj} . 若上述两项同时调整一单位, 则 b_j 就可增减相抵, 原值保持不变, 而 a_i 与 a_{i_k} 各增减一单位, 原问题仍保持平衡. 调整后的总运费变化量 ΔZ 为

$$\Delta Z = Q_{ij} - Q_{i_jj} < 0$$

说明做这样的调整对减少运费有利, 即当前产销系统存在不合理的产量布局. 每调整一单位, 总运费减少 $|Q_{ij} - Q_{i_jj}|$.

② 当 $Q_{ij} > Q_{i_jj}$ 时, a_i 与 b_j 同时减少一单位, 总运费将减少 Q_{ij} ; 而 a_{i_k} 与 b_j 同时增加一单位, 总运费将增加 Q_{i_jj} . 若上述两项同时调整一单位, b_j 也可增减相抵, 原值保持不变, 而 a_{i_k} 与 a_i 各增减一单位, 原问题仍保持平衡. 调整后的总运费变化量 ΔZ 为

$$\Delta Z = Q_{i_jj} - Q_{ij} < 0$$

也说明了做这样的调整对减少运费有利. 每调整一单位, 总运费减少 $|Q_{i_jj} - Q_{ij}|$.

必要性: ① 若 $Q_{ij} = Q_{i_jj}$, 则 $\Delta Z = 0$, 做上述调整后总运费不变.

② 存在某些 $Q_{ij} < Q_{i_jj}$, 但空格 (i, j) 的路 P 中偶顶点基变量的取值等于零, 或者存在 $Q_{ij} > Q_{i_jj}$, 但空格 (i, j) 的路 P 中奇顶点基变量的取值等于零, 由定理 6.1 知, 此时为保持最优基不变, 不能再做上述调整, 而对应的产量布局是合理的.

根据定理 4.5 和定理 4.6, 易得调整不合理产量布局的步骤和方法如下:

(1) 用表上作业法求给定的运输问题最优解, 并求出各边际值 Q_{ij} .

(2) 若存在这样的空格 (i, j) , 在其闭回路上, 有 $Q_{ij} < Q_{i_jj}$ 且 (i, j) 的路 P 中偶顶点基变量的取值大于零, 则令调整量 Δ 为 P 中偶顶点基变量的最小取值 (或 a_i 的上限), 做最大限度的调整: $a_i + \Delta$, $a_{i_k} - \Delta$, $b_i + \Delta - \Delta$, $x_{i_jj} + \Delta - \Delta$, P 中其余的偶顶点基变量的值减去 Δ , 奇顶点加上 Δ . 重复该步骤, 直至不存在这样的空格 (i, j) 为止.

(3) 若存在这样的空格 (i, j) , 在其闭回路上, 有 $Q_{ij} > Q_{i_jj}$ 且 (i, j) 的路 P 中奇顶点基变量的取值大于零, 则令调整量 Δ 为 P 中奇顶点基变量的最小值 (或 a_{i_k} 的上限), 做最大限度的调整: $a_i - \Delta$, $a_{i_k} + \Delta$, $b_i - \Delta + \Delta$, $x_{i_jj} - \Delta + \Delta$, P 中其余的奇顶点基变量的值减去 Δ , 偶顶点加上 Δ . 重复该步骤, 直至不存在这样的空格 (i, j) 为止.

(4) 已得最佳产量布局及其调运方案, 算出总运费.

举例说明如下.

例 4.13 某经典运输问题如表 4-40 所示. 试根据既定的销量和单位运价, 确定使总运费最小的产量布局.

表 4-40

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1	11	12	4	10	11	7
A_2	13	6	19	10	13	18
A_3	5	2	8	1	2	6
A_4	9	1	15	6	7	15
销 量	4	11	12	8	11	

解 用表上作业法求出相应的最优解(方案 1)如表 4-40 所示. 表中画圈的数字表示基变量的取值, 同格子的另一数字为边际值 $Q_{ij} = c_{ij} = u_i + v_j$. 没有画圈数字的格子称为空格, 格子中的数字也为相应的边际值 $Q_{ij} = u_i + v_j$. 表中最左一列和最顶一行分别为位势 u_i 和 v_j . 方案 1 的总运费 $Z = 313$.

表 4-41

销地 产地	-1 B_1	-8 B_2	4 B_3	-4 B_4	-2 B_5	产量
0 A_1	-1	-8	4 ⑦	-4	-2	7
14 A_2	13 ④	6 ⑥	18	10 ⑧	12	18
4 A_3	3	-4	8 ⑤	0	2 ①	6
9 A_4	8	1 ⑤	13	5	7 ⑩	15
销 量	4	11	12	8	11	

表 4-41 中, 存在满足步骤(2)条件的空格. 任取空格(1, 2), 做从该空格出发的闭回路如表 4-42 所示, 得最大调整量 $\Delta_1 = 5$. 做最大限度调整后($a_1 + \Delta_1$, $a_4 - \Delta_1$, $b_2 + \Delta_1 - \Delta_1$, $x_{42} + \Delta_1 - \Delta_1$, $x_{13} + \Delta_1$, $x_{33} - \Delta_1$, $x_{35} + \Delta_1$, $x_{45} - \Delta_1$), 得方案 2 如表 4-43 所示.

表 4-42

销地 产地	-1 B_1	-8 B_2	4 B_3	-4 B_4	-2 B_5	产量
0 A_1	-1	-8	4 ⑦	-4	-2	$7 + \Delta_1$
14 A_2	13 ④	6 ⑥	18	10 ⑧	12	18
4 A_3	3	-4	8 ⑤	0	2 ①	6
9 A_4	8	1 ⑤	13	5	7 ⑩	$15 - \Delta_1$
销 量	4	$11 + \Delta_1 - \Delta_1$	12	8	11	

表 4-43

产地 \ 销地		- 1 B_1	- 8 B_2	4 B_3	- 4 B_4	- 2 B_5	产量
0	A_1	- 1	- 8	4 ⑫	- 4	- 2	12
14	A_2	13 ④	6 ⑥	18	10 ⑧	12	$18 - \Delta_2$
4	A_3	3	- 4	8 ⑩	0	2 ⑥	6
9	A_4	8	1 ⑤	13	5	7 ⑤	$10 + \Delta_2$
销 量		$4 + \Delta_2 - \Delta_2$	11	12	8	11	

方案 2 与方案 1 相比, 总运费减少了

$$\Delta Z_1 = |Q_{12} - Q_{42}| \Delta_1 = |-8 - 1| \times 5 = 45$$

方案 2 的总运费为

$$Z_1 = Z - \Delta Z_1 = 313 - 45 = 268.$$

由表 4-43 知, 方案 2 中仍有不少空格满足步骤(2)中的条件. 任取空格(4, 1)进行调整. 做从该空格出发的闭回路如表 4-43 所示, 得最大调整量 $\Delta_2 = 6$, 做最大限度调整后得方案 3, 总运费减少量

$$\Delta Z_2 = |Q_{41} - Q_{21}| \Delta_2 = |8 - 13| \times 6 = 30$$

方案 3 的总运费为

$$Z_2 = Z_1 - \Delta Z_2 = 268 - 30 = 238$$

类似地, 从空格(3, 2)出发做闭回路, 得最大调整量 $\Delta_3 = 5$. 做最大限度调整后得方案 4 如表 4-44 所示. 总运费减少量

$$\Delta Z_3 = |Q_{32} - Q_{42}| \Delta_3 = |-4 - 1| \times 5 = 25$$

表 4-44

产地 \ 销地		- 1 B_1	- 8 B_2	4 B_3	- 4 B_4	- 2 B_5	产量
0	A_1	- 1	- 8	4 ⑫	- 4	- 2	12
14	A_2	13 ④	6 ⑩	18	10 ⑧	12	12
4	A_3	3	- 4	8 ⑩	0	2 ⑪	11
9	A_4	8	1 ⑪	13	5	7 ⑩	11
销 量		4	11	12	8	11	

方案 4 的总运费为

$$Z_3 = Z_2 - \Delta Z_3 = 238 - 25 = 213$$

表 4-44 中, 所有空格(i, j)均不满足步骤(2)、(3)中的条件, 故方案 4 便是各销地销量 b_j 及各产销地间单位运价 c_{ij} 既定的情况下, 最佳的产量布局及其调运方案. 它与方案 1 相比,

总运费减少了 31.9%，即

$$\Delta Z' = Z - Z_3 = 313 - 213 = 100$$

在实际工作中，只要条件许可，用上述方法调整产销系统中不合理的产量布局，可达到合理调运物资，节约运费的目的。

另一方面，若有 n 个销地的销量可由 m 个产地供给，且各销量 b_j 和单位运价 c_{ij} 为已知，而要求确定使总运费最小的 m 个产地的产量布局，也可运用上述方法来解决。其步骤是：

- (1) 任意假设一组产量 $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ ，且使产销平衡。
- (2) 求出相应的最优方案。
- (3) 用上述的步骤(2)、(3)判别并调整，直到不满足条件为止，就为所求。为加快调整速度，每次可先选 $|\Delta Z|$ 最大者所对应的空格进行调整。

2. 销量增加时应首先增加何处的产量

当某个销地的销量增加时，应首先相应地增加哪些产地的产量，才能既满足销地的需求，又使总运费的增加量为最少，甚至减少？

定理 4.7 对经典运输问题非退化的最优解 $X = \{x_{ij}\}$ 而言，有

$$Q_{i_1j} \leq Q_{i_2j} \leq \dots \leq Q_{i_mj}$$

若销地 B_j 的销量 b_j 增加 Δ_j ，则首先相应增加 A_{i_1} 的产量 a_{i_1} ，然后是 A_{i_2} 的产量 a_{i_2} ，依此类推，直至所增加的产量等于 Δ_j ，可使总运费的增加量为最少，甚至减少。

证明 由定理 4.5 立得。

当 $Q_{i_1j} < 0$ 或 $Q_{i_1j} = 0$ 时， b_j 和 a_{i_1} 同时增加 Δ_j ，总运费将减少 $|Q_{i_1j}| \Delta_j$ 或不变，即出现运输问题的“悖论”。

推论 4.3 对经典运输问题退化的最优解 $X = \{x_{ij}\}$ 而言，有

$$Q_{i_1j} \leq Q_{i_2j} \leq \dots \leq Q_{i_mj}$$

当 x_{i_1j} 为基变量，且空格 (i, j) 的路 P 中的偶顶点基变量取值均大于零时，定理 4.7 的结论成立。否则，选次小的边际值 Q_{i_2j} ，并首先相应增加 A_{i_2} 的产量 a_{i_2} ，然后是 A_{i_3} 的产量 a_{i_3} ，依此类推，定理 4.7 的结论仍成立。

3. 销量减少时应首先减少何处的产量

与上述情形相反，当某个销地的销量减少时，应首先相应地减少哪些产地的产量，才能既保持产销平衡，又使节省的总运费为最大？

定理 4.8 对经典运输问题非退化的最优解 $X = \{x_{ij}\}$ 而言，有

$$Q_{i_1j} \geq Q_{i_2j} \geq \dots \geq Q_{i_mj}$$

若销地 B_j 的销量 b_j 减少 Δ_j ，则首先相应减少 A_{i_1} 的产量 a_{i_1} ，然后是 A_{i_2} 的产量 a_{i_2} ，依此类推，直至所减少的产量等于 Δ_j ，可使总运费的节省为最大。

证明 由定理 4.5 立得。

推论 4.4 对经典运输问题退化的最优解 $X = \{x_{ij}\}$ 而言，有

$$Q_{i_1j} \geq Q_{i_2j} \geq \dots \geq Q_{i_mj}$$

当 x_{i_1j} 是基变量且 $x_{i_1j} > 0$ 时，或 x_{i_1j} 是非基变量，且空格 (i_1, j) 的路 P 中的奇顶点基变量取值

均大于零时, 定理 4.8 的结论成立. 否则, 选次小的边际值 Q_{i_2} , 并首先相应减少 A_{i_2} 的产量 a_{i_2} , 然后是 A_{i_3} 的产量 a_{i_3} , 依此类推, 定理 4.8 的结论仍成立.

4. 产量减少时应首先减少何处的销量

当某个产地的产量减少时, 应首先相应地减少哪些销地的销量, 才能既保持产销平衡, 又使节省的总运费为最大?

定理 4.9 对经典运输问题非退化的最优解 $X = \{x_{ij}\}$ 而言, 有

$$Q_{ij_1} \geq Q_{ij_2} \geq \cdots \geq Q_{ij_n}$$

若产地 A_j 的产量 a_j 减少 Δ_i , 则首先相应减少 B_{j_1} 的销量 b_{j_1} , 然后是 B_{j_2} 的产量 b_{j_2} , 依此类推, 直至所减少的产量等于 Δ_i , 可使节省的总运费为最大.

证明 由定理 4.5 立得.

推论 4.5 对经典运输问题退化的最优解 $X = \{x_{ij}\}$ 而言, 有

$$Q_{ij_1} \geq Q_{ij_2} \geq \cdots \geq Q_{ij_n}$$

当 x_{ij_1} 是基变量且 $x_{ij_1} > 0$ 时, 或 x_{ij_1} 为非基变量, 且空格 (i, j_1) 的路 P 中的奇顶点基变量取值均大于零时, 定理 4.9 的结论成立. 否则, 选取次小的边际值 Q_{ij_2} , 并首先相应减少 B_{j_2} 的销量 b_{j_2} , 然后是 B_{j_3} 的销量 b_{j_3} , 依此类推, 定理 4.9 的结论仍成立.

相反地, 当某产地的产量增加时, 应首先相应地在哪些销地促销, 使其销量增加, 才能既保持平衡, 又使总运费的增加量为最少或者减少, 可用类似于上述的方法进行分析.

在物资调运工作中, 只要条件允许, 灵活运用运输问题边际值的概念及其相应的应用方法, 对合理调运物资, 节约运输费用, 将起到一定的作用.

由上述的论述可见, “悖论”不悖, 它告诉了人们这样一个事实: 恰好完成预定的任务往往不是最节省的, 有时为了使系统更舒坦地施展它的潜力, 宁可多干些活. 这也说明原来规定的任务量与这个生产系统是不协调的. 因此, 在建立数学模型时(如条件允许), 最好把约束方程中的“=”号换成“ $\geq$ ”号, 以便留出伸展的余地.

4.6.2 对 c_{ij} 值的灵敏度分析

对 c_{ij} 值的灵敏度分析, 就是求出 c_{ij} 的允许变动范围, 使得 c_{ij} 在此范围内变动时, 当前的最优解保持不变. 维持最优解不变的条件是非基变量的检验数都保持为大于等于零. 现分以下两种情况讨论.

(1) x_{ij} 为非基变量

当 A_i 至 B_j 间的单位运价为 c_{ij} 时, x_{ij} 已不在最优基变量内, 可见当 c_{ij} 值增大时, 就更不会变为基变量. 因此, c_{ij} 变动的上限为 ∞ .

x_{ij} 的检验为 $c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$, 因此, 当 c_{ij} 减少时, 只要满足 $c_{ij} \geq (u_i + v_j)$, 当前的最优解就可保持不变. 故得 c_{ij} 的允许变动范围为

$$(u_i + v_j) \leq c_{ij} < \infty$$

(2) x_{ij} 为基变量

由位势法知, $c_{ij} = (u_i + v_j)$. 当 c_{ij} 发生变化时, u_i 或 v_j 必发生变化, 并将导致其他相关的位势以及检验数发生变化. 因此, 可通过使检验数保持非负来求出 c_{ij} 的变化范围. 步骤如下:

- ①设新的 c_{ij} 值为 y .
- ②根据 y , 重新计算各位势.
- ③根据 y , 重新计算检验数的值.
- ④将所有包含有 y 的检验数列成 ≥ 0 的不等式方程.
- ⑤同时解步骤④中的所有不等式方程, 即可求出允许 c_{ij} 变化的上下限.

例 4.14 对表 4-45 中所给的最优解, 求出使当前最优解保持不变的最 c_{23} 值变化范围.

表 4-45

销地 产地		2 B_1	2 B_2	9 B_3	2 B_4	产量
0	A_1	2 ③	5 3	9 ⑤	8 6	40
-1	A_2	4 3	1 ④	8 ⑬	4 3	60
0	A_3	7 5	10 8	9 ⑩	2 ④	50
销 量		35	45	30	40	

解 设新的 c_{23} 值为 y , 则根据 y 求出的位势和检验数如表 4-46 所示. $x_{12}, x_{21}, x_{24}, x_{32}$ 的检验数都有 y , 若要保持当前的最优解不变, y 的值必须满足如下不等式:

$$\begin{aligned}
 y - 5 &\geq 0 \\
 11 - y &\geq 0 \\
 11 - y &\geq 0 \\
 y &\geq 0
 \end{aligned}$$

化简后得 $5 \leq y \leq 11$. 因此, 只要 c_{23} 在 5~11 之间变化, 当前的最优解就保持不变.

表 4-46

销地 产地		2 B_1	10-y B_2	9 B_3	2 B_4	产量
0	A_1	2 ③	5 $y-5$	9 ⑤	8 6	40
$y-9$	A_2	4 $11-y$	1 ④	y ⑬	4 $11-y$	60
0	A_3	7 5	10 y	9 ⑩	2 ④	50
销 量		35	45	30	40	

4.6.3 对 a_i 值及 b_j 值的灵敏度分析

对 a_i 及 b_j 的灵敏度分析, 就是在最优解基变量保持不变但基变量的取值可以变动的条件下, 求出 a_i 和 b_j 可同时变动的范围 Δ_{ij} . 分析的基础是 a_i 和 b_j 在允许变动范围内, 基变量的取值要满足非负约束. 若有变量不满足非负约束, 就说 a_i 与 b_j 的变动越出了灵敏度范围.

分两种情况讨论.

(1) x_{ij} 为基变量

从定理 4.5 的证明中, 便可得 a_i 和 b_j 可同时变动的范围为

$$-x_{ij} \leq \Delta_{ij} < \infty$$

a_i 和 b_j 在这个范围内变化时, 目标函数值由原来的 Z 变为

$$Z' = Z + \Delta_{ij} c_{ij}$$

(2) x_{ij} 为非基变量

同样地, 从定理 6.1 的证明中, 可得 a_i 和 b_j 可同时变动的范围为

$$\min_{\text{对 } P \text{ 中的奇顶点}} \{x_{ij_1}, \dots, x_{ij_l}\} \leq \Delta_{ij} \leq \min_{\text{对 } P \text{ 中的偶顶点}} \{x_{i_{l+1}j_1}, \dots, x_{i_{l+k}j_k}\}$$

当 Δ_{ij} 在这个范围内时, 目标函数 Z 的取值变为

$$Z' = Z + (u_i + v_j) \Delta_{ij}$$

在上述两种情况中, 若 Δ_{ij} 超出了允许的上下限, 就会有某个基变量的取值违反非负约束, 假设有 $x_{st} < 0$, 则原来的最优解就成为不可行解, 但其对偶问题是可行的. 因而可以用对偶算法在此基础上直接求出新的最优解, 步骤如下:

(1) 在非基变量中取某个 x_{kl} 满足下列三个条件:

① 使存在一条除 x_{kl} 外全是基变量的闭回路且包含 x_{st} .

② (s, t) 是从格子 (k, l) 出发的闭回路中的奇顶点.

③ x_{kl} 是满足①和②的所有非基变量中检验数最小者 (有多个时任取一个).

(2) 在以 x_{kl} 为起点且包含 x_{st} 的闭回路中, 以 $-x_{st}$ 为调整量进行调整. x_{kl} 为闭回路中的第 1 个顶点加上调整量, 余下的依次按偶顶点减去调整量, 奇顶点加上调整量进行调整 (从而有 $x_{kl} = (-x_{st})$ 变为基变量, $x_{st} = x_{st} + (-x_{st}) = 0$ 变为非基变量), 于是得到一组新解.

(3) 若仍存在其他取值小于零的基变量, 返回步骤 (1), 否则转入 (4).

(4) 这时已得最优解, 算出总运费. 停止.

例 4.15 某运输问题如表 4-47 所示. 用表上作业法求出此问题的最优解如表 4-48, 表中最左一列和最顶一行分别是位势 u_i 和 v_j , 位于格子右边画圈的数字表示基变量的取值, 不画圈的数字表示非基变量的检验数.

(1) 求 a_3 和 b_3 可同时变动的范围.

(2) 产地 A_3 的产量和销地 B_3 的销量各增加 3 单位, 是否要改变最优解?

表 4-47

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	3	12	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销 量	3	6	5	6	

表 4-48

产地 \ 销地		3 B_1	9 B_2	3 B_3	10 B_4	产量
0	A_1	3 ②	11 2	3 ⑤	12 2	7
-2	A_2	1 ①	9 2	2 1	8 ③	4
-5	A_3	7 9	4 ⑥	10 12	5 ③	9
销 量		3	6	5	6	

解 (1) 因 x_{33} 是非基变量, 作从空格(3, 3)出发的闭回路如表 4-49 所示. 得 Δ_{33} 的上下限为

$$\begin{aligned}
 -\min\{x_{13}, x_{21}, x_{34}\} &\leq \Delta_{33} \leq \min\{x_{11}, x_{24}\} \\
 -\min\{5, 1, 3\} &\leq \Delta_{33} \leq \min\{2, 3\} \\
 -1 &\leq \Delta_{33} \leq 2
 \end{aligned}$$

(2) a_3 和 b_3 各增加 3 单位, 超过了 Δ_{33} 的上限, 最优解要改变. 在 P 中进行调整后 ($a_3 + 3, b_3 + 3, x_{13} + 3, x_{11} - 3, x_{21} + 3, x_{24} - 3, x_{34} + 3$), 得表 4-50.

表 4-49

产地 \ 销地		3 B_1	9 B_2	3 B_3	10 B_4	产量
0	A_1	3 ② $\lrcorner$	11 2	3 ⑤ $\lrcorner$	12 2	7
-2	A_2	1 ① $\llcorner$	9 2	2 1 $\lrcorner$	8 ③ $\lrcorner$	4
-5	A_3	7 9	4 ⑥	10 12 $\llcorner$	5 ③ $\lrcorner$	9
销 量		3	6	5	6	

表 4-50

产地 \ 销地		3 B_1	9 B_2	3 B_3	10 B_4	产量
0	A_1	3 -1 $\lrcorner$	11 2	3 ⑧ $\lrcorner$	12 2	7
-2	A_2	1 ④ $\llcorner$	9 2	2 1 $\lrcorner$	8 0	4
-5	A_3	7 9	4 ⑥	10 12	5 ⑥	12
销 量		3	6	8	6	

表 4-50 中, $x_{11} = -1$, 违反非负约束. 于是用对偶算法求新的最优解. x_{23} 是满足对偶算法步骤 1 中三个条件的非基变量, 做空格(2, 3)的闭回路, 并以调整量 $-x_{11} = 1$ 进行调整后 ($x_{23} + 1, x_{21} - 1, x_{11} + 1, x_{13} - 1$), 便得到新的最优解如表 4-51.

表 4-51

销 地		2	8	3	9	产量
产 地		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	3 1	11 3	3 ⑦	12 3	7
-1	A_2	1 ③	9 2	2 ①	8 0	4
-4	A_3	7 9	4 ⑥	10 11	5 ⑥	12
销 量		3	6	8	6	

4.7* 运输问题的匈牙利法

匈牙利法是求解指派问题的有效算法. 既然指派问题是运输问题的特殊形式, 那么用匈牙利法也可以求解运输问题. 它的算法思想是: 在运输问题运价矩阵中的每一行中减去一个最小数, 再在矩阵的每一列中减去下个最小数, 得到新矩阵中每行或(和)每列中至少存在一个零元素, 逐步取零元素对应的变量 $x_{ij} = \min\{\bar{a}_i, \bar{b}_i\}$. 若得到一组可行解, 则问题得到最优解, 否则, 重新对目前的矩阵进行初等变换, 不断增加或移动零元素, 重新分配运量, 直到得到可行解为止. 由于运输问题一定存在最优解, 且所有基变量的系数(在新矩阵中)都为零, 所以目标函数值为零, 达到了最小值, 下面引例说明算法的基本步骤.

例 4.16 设运输问题的运输矩阵 $C = (c_{ij})$ 如表 4-52 所示. a_i 和 b_i 标在运价表的右边和下边, 要求总运输费用最小的调运方案.

表 4-52

收点		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
发点						
	A_1	2	9	10	7	9
	A_2	1	3	4	2	5
	A_3	8	4	2	5	7
	b_i	3	8	4	6	

第一步: 对运价矩阵 $\{$ 设为 $A = (a_{ij})\}$ 进行初等交换. 在每一行中减去一个最小数, 得矩阵 $B = (b_{ij})$, 再在 B 的每列中减去一个最小数, 又得新矩阵 $C = (c_{ij})$, 此时 C 中每行或(和)每列中至少存在一个零元素, 称 C 为正规矩阵, 可以证明(证略, 下同), 矩阵 A 与 B 有相同最优解, 矩阵 B 与 C 有相同最优解. 故知 A 与 C 有相同最优解. 因此, 只要对 C 求最优解, 其变换过程如表 4-53 所示.

表 4-53

$A = (a_{ij})$						$B = (b_{ij})$						$C = (c_{ij})$				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	2	9	10	7	-2	A_1	0	7	8	5	A_1	(0)	5	8	4	
A_2	1	3	4	2	-1	A_2	0	2	3	1	A_2	0	0	3	(0)	
A_3	8	4	2	5	-2	A_3	6	2	0	3	A_3	6	0	(0)	2	

表 4-55

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	1	8	0
A_2	4	0	7	0
A_3	10	0	4	2
	- 4			

表 4-56

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	9
	$(0)_3 \cdots$	$1 \cdots$	$4 \cdots$	$(0)_6$	
A_2	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	5
	$4 \cdots$	$(0)_5 \cdots$	$3 \cdots$	0	
A_3	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	7
	$10 \cdots$	$(0)_3 \cdots$	$(0)_4 \cdots$	$2 \cdots$	
b_j	3	8	4	6	

返回第二步： $c'_{11} = c'_{33} = 0$ ，取 $x_{11} = 3$ ， $x_{33} = 4$ ，消去第 1 列和第 3 行，下余矩阵仍是正规矩阵，取 $x_{14} = 6$ ，消去第 1 行和第 4 列，再取 $x_{21} = 5$ ， $x_{32} = 3$ ，划消去线后，此时， C' 中所有元素均被消去线复盖，且发量已经发完，收量已经满足，得到最优解。将最优解中的调充量填入原始运价表中，如表 4-57，可知其最小运输费用 $S^* = 2 \times 3 + 7 \times 6 + 3 \times 5 + 4 \times 3 + 2 \times 4 = 83$

表 4-57

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$(2)_3$	9	10	$(7)_6$	9
A_2	1	$(3)_5$	4	2	5
A_3	8	$(4)_3$	$(2)_4$	5	7
b_i	3	8	4	6	

由上可知，与表上作业法相比，这种算法有如下特点：表上作业法必须通过确定初始基本可行解，求检验数和利用闭回路调整运量等重复步骤才能得出问题的最优解。本算法毋须求检验数和确定闭回路，只要对运价矩阵进行简单的初等变换后求出可行解亦是最优解，计算工作相对较小；此外，由于利用端点元素确定的解变量都是非零变量，无须添加“零运量”，因而不要引入“退化”概念，不作退化处理，在表上作业法中，解变量的个数必须严格满足 $(m+n-1)$ 的要求，否则无法求出检验数，在此，解变量的个数 k 的取值为

$$m \leq k \leq m+n-1 \text{ (当 } m \geq n \text{ 时)}$$

$$n \leq k \leq m+n-1 \text{ (当 } m \leq n \text{ 时)}$$

4.8* 一次最优法

求解线性规划问题时，无论采用何种优化方法都要经过多次迭代计算才能得到最优解，不但计算工作繁杂，而且对于大型的线性规划问题，即使采用计算机运算也会带来一定困难，可否找到一种方法，不经过任何迭代运算，一次求出问题的最优解。下面介绍一种有条件限制的一次最优法，作为改善运输问题和指派问题优化方法的尝试。

4.8.1 运输问题的一次最优法

1. 一次最优法的算法思想

设在运价矩阵 $C = (c_{ij})$ 中, 可以找到这样一个元素, 以它为顶点的所有四边形中, 它和对角线上另一个元素之和总是小于或等于另一条对角线上两个元素之和, 称这样的元素为最优元素, 然后取对应于最优元素的解变量 $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$. 在下余的矩阵, 又找类似的全优元素, $\dots$, 直到使发量发完, 收量满足. 由此得出的一组解亦是最优解.

2. 一次最优法的优化原理

为方便设运价矩阵 $C = (c_{ij}) (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n)$ 中存在最优元素 $c_{i_0 j_0} (i \neq i_0; j \neq j_0)$. i_0, i 行和 j_0, j 列组成的若干个四边形中, 对于最小化问题满足 $c_{i_0 j_0} + c_{ij} \leq c_{i_0 j} + c_{ij_0}$.

定理 1 若 $c_{i_0 j_0}$ 是运价矩阵 $C = (c_{ij})$ 中的一个最优元素, 若取 $c_{i_0 j_0}$ 对应的解变量 $x_{i_0 j_0} = \min\{a_i, b_j\}$, 则 $x_{i_0 j_0}$ 必是运输问题最优解中的一个基变量.

证 设 $C = (c_{ij})$ 中任意两行 i_0 和 i 及任意两列 j_0, j 其变叉点的元素分别为 $c_{i_0 j_0}, c_{ij_0}, c_{ij}, c_{i_0 j}$, 它们组成 2×2 方阵, 又设 C 除方阵以外对应的目标值为 D . 显然, 当 $x_{i_0 j_0}$ 为非零变量时, C 的目标值为

$$S_1 = D + c_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0} + c_{ij_0} x_{ij_0} + c_{ij} x_{ij} + c_{i_0 j} x_{i_0 j}$$

由表上作业法闭路调整原理可知, x_{ij_0} 和 $x_{i_0 j}$ 中必有一个是非基变量, 亦即 $x_{i_0 j}$ 和 x_{ij_0} 中必有一个等于零. 设 $\delta = \min\{x_{i_0 j_0}, x_{ij}\}$, 方阵调整后其目标函数值为

$$\begin{aligned} S_2 &= D + c_{i_0 j_0} (x_{i_0 j_0} - \delta) + c_{ij_0} (x_{ij_0} + \delta) + c_{ij} (x_{ij} + \delta) \\ &\quad + c_{i_0 j} (x_{i_0 j} - \delta) = D + c_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_0} \delta + c_{ij_0} x_{ij_0} + c_{ij_0} \delta \\ &\quad + c_{ij} x_{ij} - c_{ij} \delta + c_{i_0 j} x_{i_0 j} - c_{i_0 j} \delta \\ &= D + c_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0} + c_{ij_0} x_{ij_0} + c_{i_0 j} x_{i_0 j} + c_{ij} x_{ij} - c_{i_0 j_0} \delta - c_{ij} \delta \\ &\quad + c_{i_0 j} \delta + c_{ij_0} \delta = S_1 - \delta (c_{i_0 j_0} + c_{ij}) + \delta (c_{i_0 j} + c_{ij_0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由 } S_1 - S_2 &= \delta (c_{i_0 j_0} + c_{ij}) - \delta (c_{i_0 j} + c_{ij_0}) \\ &= \delta [(c_{i_0 j_0} + c_{ij}) - (c_{i_0 j} + c_{ij_0})] \end{aligned}$$

因对所有的 i 和 j , 有 $c_{i_0 j_0} + c_{ij} \leq c_{i_0 j} + c_{ij_0}$.

故 $S_1 - S_2 \leq 0$, 或 $S_1 \leq S_2$, 证毕.

定理 2 设 $c_{i_0 j_0}$ 是 C 中一个最优元素, 取 $x_{i_0 j_0} = \min\{a_i, b_j\}$, 消去 i_0 行或 $(i_0)j_0$ 列, 在下余的矩阵中, 又选最优元素 $c_{i_1 j_1}$, 取 $x_{i_1 j_1} = \min\{\bar{a}_i, \bar{b}_j\}$, 又消去 i_1 行或 $(\text{和})j_1$ 列, 如此进行, 直到各发点发完, 各收点满足, 所得的解变量 $x_{i_0 j_0}, x_{i_1 j_1}, \dots, x_{i_m+n-1 j_{m+n-1}}$ 便是运输问题的最优解. (证略)

3. 一次最优法示例

引用例 4.1 题, 运价表见表 4-58.

表 4-58

发 点 \ 收 点	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	(2)	9	10	7	9
A_2	1	3	4	2	5
A_3	8	4	2	5	7
b_j	3	8	4	6	

由定理 1, 选 $c_{11} = 2$, 以它为顶点计算四边形对角线之和, 如在 $c_{11} - c_{21} - c_{22} - c_{12}$ 中, $c_{11} + c_{22} = 2 + 3$, $c_{21} + c_{12} = 1 + 9$, 得出 $c_{11} + c_{22} \leq c_{21} + c_{12}$, 又如在 $c_{11} - c_{21} - c_{23} - c_{13}$ 中, $c_{11} + c_{13} = 2 + 4$, $c_{21} + c_{13} = 1 + 10$, 得出 $c_{11} + c_{13} \leq c_{21} + c_{13}$. 如此类推, 可知 c_{11} 为最优元素, 取 $x_{11} = \min\{9, 3\} = 3$, 消去第 3 列, 如表 4-58 所示, 消去的运价元素不再参加以后的运算, 本例中下余矩阵如表 4-59.

表 4-59

	B_2	B_3	B_4	$\bar{a}_i$
A_1	9	16	(7) ₈	6
A_2	(3) ₅	4	2	5
A_3	(4) ₃	(2) ₄	5	7
b_j	8	4	6	

表 4-59 中 $c_{33} = 2$ 为最优元素, 取 $x_{33} = \min\{7, 4\} = 4$, 消去第 3 列, 下余矩阵中, $c_{32} = 4$ 为最优元素, 取 $x_{32} = \min\{3, 8\} = 3$, 消去第 3 行, 又选 $c_{22} = 3$, 取 $x_{22} = \min\{5, 5\} = 5$, 同时消去第 2 行和第 2 列, 剩下 $c_{14} = 7$, 取 $x_{14} = \min\{6, 6\} = 6$, 再消去第 1 行第 4 列, 至此 C 中所有元素 c_{ij} 被消去线覆盖, 发点全部发完, 收量全部满足, 故得出问题的最优解, 如表 4-60.

表 4-60

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\bar{a}_i$
A_1	(2) ₃	9	10	(7) ₆	6
A_2	1	(3) ₅	4	2	5
A_3	8	(4) ₃	(2) ₄	5	7
b_j	3	8	4	6	

需要注意的是: 在 C 中画消去线时, 若遇只剩下一行元素或一列元素未被消去, 此时在求最小化问题时, 应从最小的元素开始逐一选取最优元素, 直至将运价元素全部被消去线覆盖为止.

4.8.2 指派问题的一次最优法

运用一次最优法求指派问题的最优解的原理和方法基本上与上述运输问题的求解类似, 不同的是: 在指派问题效率矩阵 C 中选取最优元素 $c_{i_0 j_0}$ 时, 应取 $x_{i_0 j_0} = 1$, 且同时消去第 i_0 行和第 j_0 列, 以下例说明.

例 4.16 设有一指派问题的效率矩阵如表 4-61 所示, 求最小化指派方案.

表 4-61

$i \backslash j$	a	b	c	d
1	10	9	7	8
2	5	8	7	7
3	5	4	6	5
4	4	3	4	5

先在 C 中确定一个最优元素，如 $c_{1c} = 7$ ，以它为顶点的所有四边形中，都满足最优化条件，取 $x_{1c} = 1$ ，消去第 1 行和第 3 列，如表 4-62。

表4-62

	a	b	c	d
1	-10...	9...	⑦	...
2	5	8	7	7
3	5	5	6	5
4	4	3	4	5

表4-63

	a	b	c	d
1		⋮		
2	⑤	8		7
3	5	4		⑤
4	... 4 ...	③	...	...5

下余矩阵如表 4-63， $c_{4b} = 3$ 为最优元素，取 $x_{4b} = 1$ ，消去第 4 行和第 2 列，剩下 4 个元素中， $c_{2a} = 5$ ， $c_{3d} = 5$ 均为最优元素，取 $x_{2a} = 1$ ， $x_{3d} = 1$ ，分别消去所在的行和列，即得出问题最优方案，如表 4-64 所示。

而 $\min S = 7 + 5 + 5 + 3 = 20$

需要指出，一次最优法不是一个通用算法，当 C 中不存在最优元素时，该方法不适用。若遇求最大化问题，可将最优元素定为： $c_{ij_0} + c_{ij} \geq c_{ij_0} + c_{ij_0}$ 即可，计算步骤与求最小化问题相同。

表 4-64

	a	b	c	d
1	10	9	⑦	8
2	⑤	8	7	7
3	5	4	6	⑤
4	5	③	4	5