

运筹学课后习题解答

第 1 章 线性规划及单纯形法

1.1 将下列线性规划问题模型转化为标准形式

(1)

$$\begin{aligned} \min S &= -5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 \\ s.t. &\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 14 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

转化结果:

$$\begin{aligned} \max Z &= 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 \\ s.t. &\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 14 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 - 4x_2 + x_3 \\ s.t. &\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

转化结果:

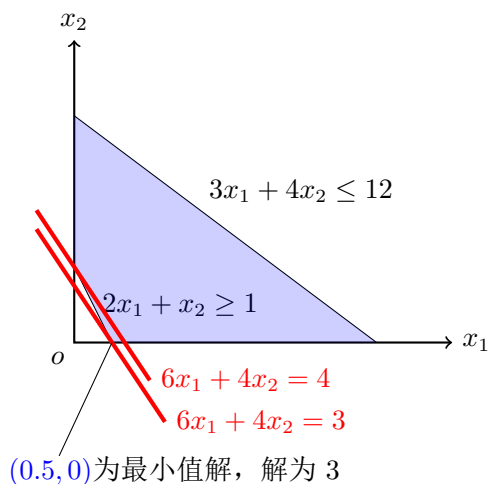
$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 - 4x_2 + x_3' - x_3'' \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3' - 3x_3'' - x_5 = 6 \\ x_1 - 4x_2 + x_3' - x_3'' = 2 \\ x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 用图解法求解下列线性规划问题, 并指出各问题的特征

(1)

$$\begin{aligned} \min S &= 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

图解法:



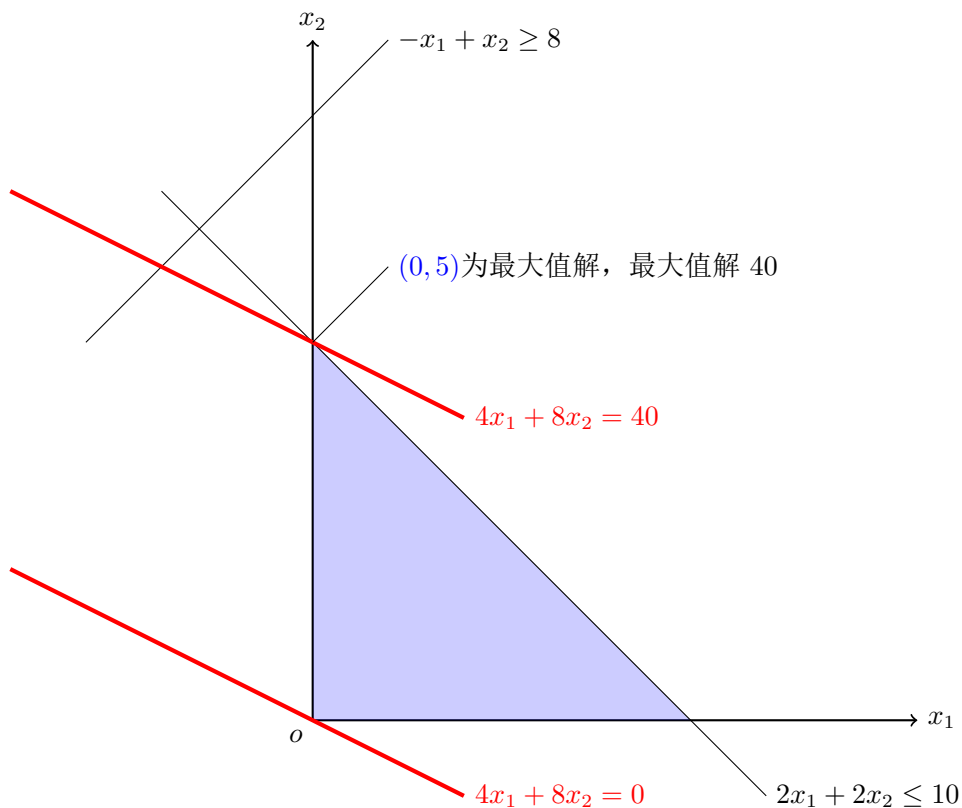
从图形可知, 该问题有唯一最小值解 (0.5, 0), 解的值为 3。

(2)

$$\begin{aligned} \max Z &= 4x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

图解法:

从上图可以看出, 该问题有唯一最大值解, 最大值解为 40, 处于 $2x_1 + 2x_2 \leq 10$ 与坐标轴的交点 (0, 5) 处。



(3)

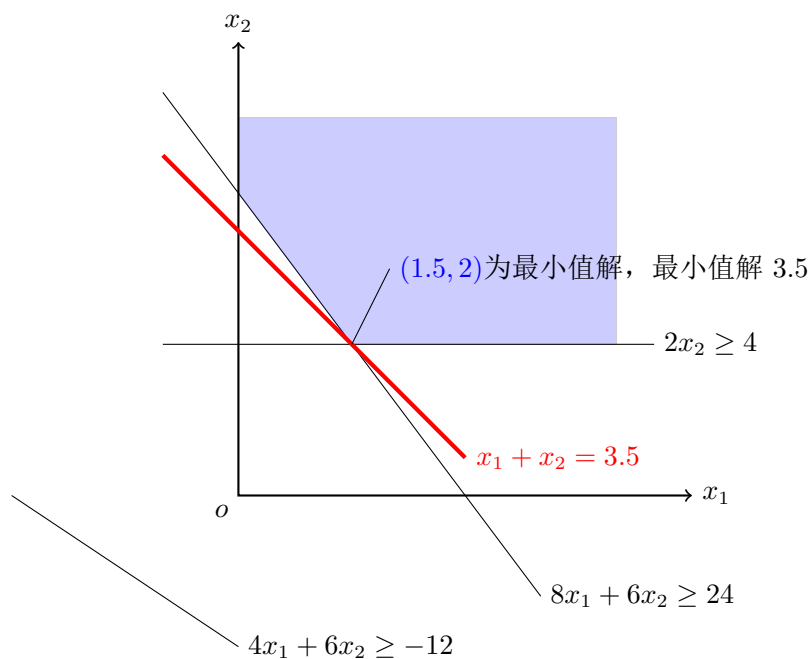
$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq -12 \\ 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

图解法:

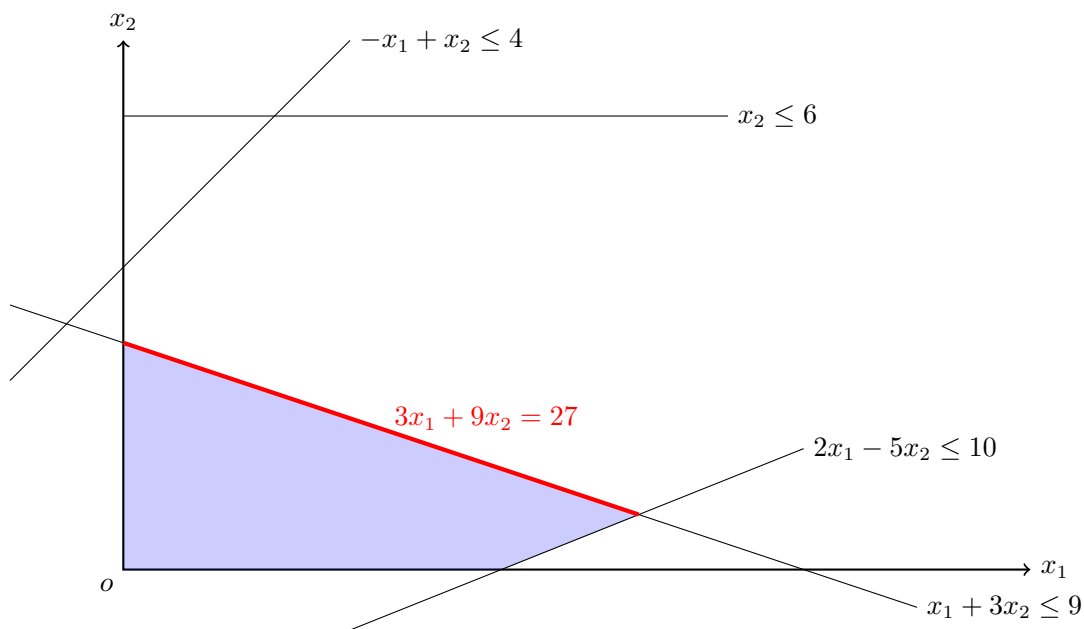
从图形中可以看出，该线性规划是个无界解，无法求解到最大值，其最小值在 $(1.5, 2)$ 处取得，最小值为 3.5。

(4)

$$\begin{aligned} \max Z &= 3x_1 + 9x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



图解法:



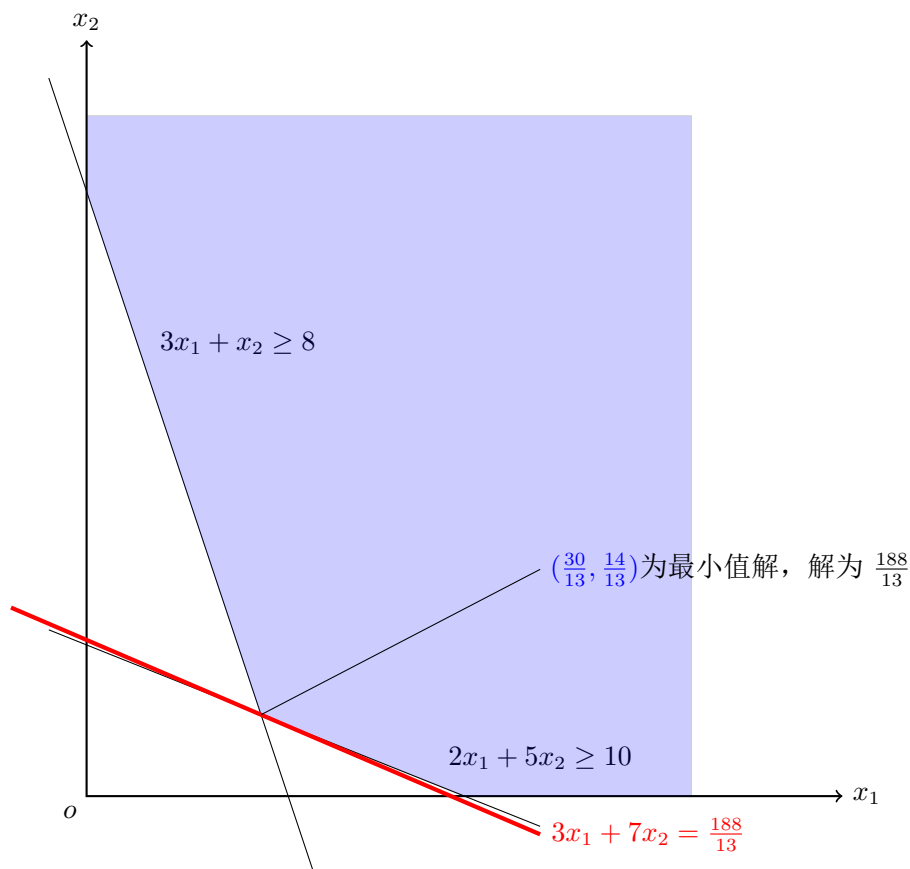
从上图可以看出，该线性规划问题有无穷多解，只要在 $x_1 + 3x_2 = 9$ 上，且满足 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ 即可。

1.3 用图解法求解下列线性规划问题，并指出所有基本可行解及相应目标函数值

(1)

$$\begin{aligned} \min S &= 3x_1 + 7x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

图解法：



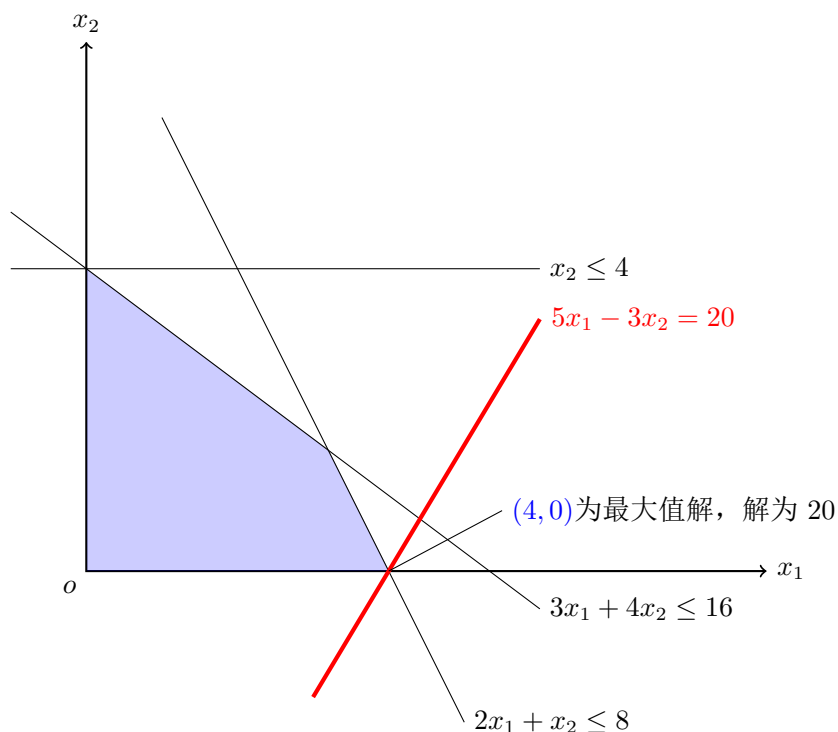
(2)

$$\begin{aligned} \max Z &= 5x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

图解法：

1.4 分别用单纯形法和图解法求解下列线性规划问题，并对照指出单纯形法迭代的每一步相当于图解法可行域中的哪一个顶点？

第 1 章 线性规划及单纯形法



1.4 分别用单纯形法和图解法求解下列线性规划问题，并对照指出单纯形法迭代的每一步相当于图解法可行域中的哪一个顶点？

(1)

$$\max Z = 10x_1 + 5x_2$$

$$s.t. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 9 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

单纯形法：需要对线性规划问题转化为标准形式，具体转化后的标准形式如下：

$$\max Z = 10x_1 + 5x_2$$

$$s.t. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 9 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

取 x_3 和 x_4 为基变量，令 $x_1 = x_2 = 0$ 为非基变量，从而转化为如下表达式：

$$\max Z = 10x_1 + 5x_2$$

$$s.t. \begin{cases} x_3 = 3x_1 + 4x_2 - 9 \\ x_4 = 8 - 5x_1 - 2x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

1.4 分别用单纯形法和图解法求解下列线性规划问题，并对照指出单纯形法迭代的每一步相当于图解法可行域中的哪一个顶点？
第 1 章 线性规划及单纯形法

观察目标函数，若选择 x_1 作为进基变量，则为使得 $x_3 \geq 0$ ，则 $x_1 \geq 3$ ； $x_4 \geq 0$ ，则 $x_1 \leq \frac{8}{5}$ ，显然无法同时满足要求。因此选择 x_2 作为进基变量，则为使得 $x_3 \geq 0$ ，则 $x_2 \geq 2.25$ ； $x_4 \geq 0$ ，则 $x_2 \leq 4$ ，因此， x_2 为进基变量， x_3 为出基变量，并进行转化

$$\begin{aligned} \max Z &= 10x_1 + 5x_2 \\ s.t. \quad &\begin{cases} x_2 = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 \\ x_4 = 8 - 5x_1 - 2x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

x_1 和 x_3 为非基变量，从而得到 $x_2 = \frac{9}{4}$ ， $x_4 = 3.5$ ，得到的基本可行解 $(0, 2.25, 0, 3.5)$ ，对应图解法中的第一个交叉点 $(2.25, 0)$ ，目标函数转化为 $\frac{45}{4} + \frac{25}{4}x_1 + \frac{5}{4}x_3$ ，整个线性规划问题转化为如下形式

$$\begin{aligned} \max Z &= \frac{45}{4} + \frac{25}{4}x_1 + \frac{5}{4}x_3 \\ s.t. \quad &\begin{cases} x_2 = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 \\ x_4 = \frac{14}{4} - \frac{14}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

观察目标函数，选择 x_1 作为进基变量，此时 $x_1 = \min\{3, 1\} = 1$ ，即选择 x_4 作为出基变量，则 $x_1 = 1 - \frac{4}{14}x_4 - \frac{2}{14}x_3$ ，代入到目标函数和第一个约束式， $x_2 = \frac{6}{4} + \frac{5}{14}x_3 + \frac{3}{14}x_4$ ，由于 $x_3 = x_4 = 0$ 为非基变量，此时 $x_1 = 1$ ， $x_2 = 1.5$ ，得到基本可行解为 $(1, 1.5, 0, 0)$ ，对应图解法中的第二个交叉点，此时目标函数值为 17.5，此时目标函数式为 $\frac{70}{4} + \frac{5}{14}x_3 - \frac{25}{14}x_4$ ，线性规划表达式转化为如下形式

$$\begin{aligned} \max Z &= \frac{70}{4} + \frac{5}{14}x_3 - \frac{25}{14}x_4 \\ s.t. \quad &\begin{cases} x_2 = \frac{6}{4} + \frac{5}{14}x_3 + \frac{3}{14}x_4 \\ x_1 = 1 - \frac{4}{14}x_4 - \frac{2}{14}x_3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

观察目标函数，选择 x_3 作为进基变量，此时 x_1 作为出基变量，从而 $x_3 = 7 - 7x_1 - 2x_4$ ，此时 $x_2 = 4 - \frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4$ ，基本可行解为 $(0, 4, 7, 0)$ ，对应的目标函数值为 20，对应的目标函数式为 $20 - \frac{5}{2}x_1 - \frac{35}{14}x_4$ ，线性规划问题转化为如下形式

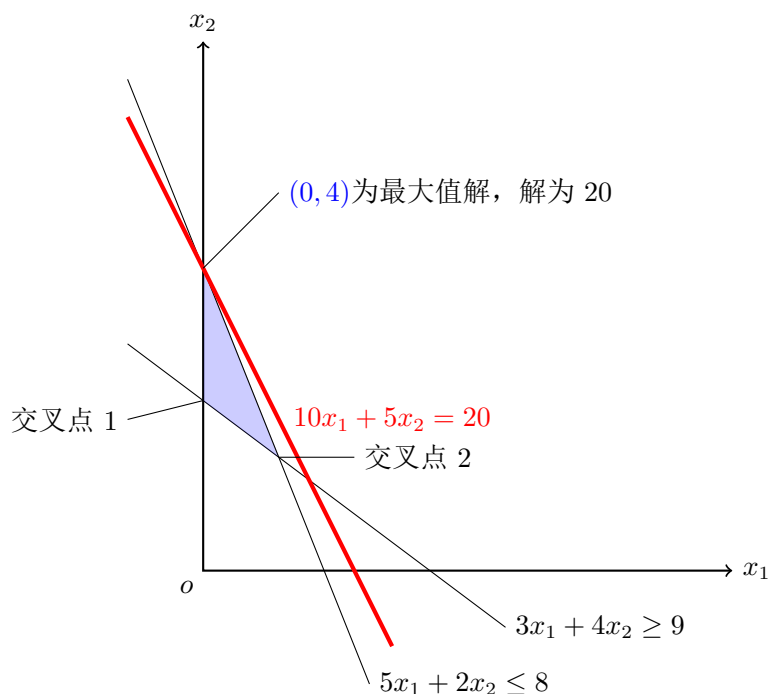
$$\begin{aligned} \max Z &= 20 - \frac{5}{2}x_1 - \frac{35}{14}x_4 \\ s.t. \quad &\begin{cases} x_2 = 4 - \frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = 7 - 7x_1 - 2x_4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.4 分别用单纯形法和图解法求解下列线性规划问题，并对照指出单纯形法迭代的每一步相当于图解法可行域中的哪一个顶点？

第 1 章 线性规划及单纯形法

观察目标函数，此时无系数为正的变量，迭代结束，最优解为 $(0, 4, 7, 0)$ ，最优解目标函数值为 20。

图解法：



(2)

$$\max Z = 100x_1 + 200x_2$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 500 \\ x_1 \leq 200 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 1200 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

单纯形法：需要将线性规划转化成标准形式，具体如下：

$$\max Z = 100x_1 + 200x_2$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 500 \\ x_1 + x_4 = 200 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_5 = 1200 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

取 x_3, x_4 和 x_5 为基变量，令 $x_1 = x_2 = 0$ 为非基变量，从而转化为如下表达式：

1.4 分别用单纯形法和图解法求解下列线性规划问题，并对照指出单纯形法迭代的每一步相当于图解法可行域中的哪一个顶点？

第 1 章 线性规划及单纯形法

$$\begin{aligned} \max Z &= 100x_1 + 200x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_3 = 500 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 200 - x_1 \\ x_5 = 1200 - 2x_1 - 6x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

观察目标函数式，选择 x_2 作为进基变量，要使 $x_3 \geq 0$ 和 $x_5 \geq 0$ ，此时， $x_2 = \min\{500, 200\}$ ，因此，选择第三个约束式进行转化，即 x_5 作为出基变量，具体如下：

$$\begin{aligned} \max Z &= 40000 + \frac{100}{3}x_1 - \frac{50000}{3}x_5 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_3 = 300 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{250}{3}x_5 \\ x_4 = 200 - x_1 \\ x_2 = 200 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{250}{3}x_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

此时，基变量为 x_2, x_3 和 x_4 ，非基变量为 $x_1 = x_5 = 0$ ，从而可得 $x_2 = 200, x_3 = 300, x_4 = 200$ ，得到的基本可行解为 $(0, 200, 300, 200, 0)$ ，对应图解法中的第一个交叉点，目标函数值为 40000。

观察目标函数式，选择 x_1 作为进基变量，此时， $x_1 = \min\{450, 200, 600\} = 200$ 。因此，选择第二个约束作，即 x_4 作为出基变量，对线性规划问题进行转化，具体如下：

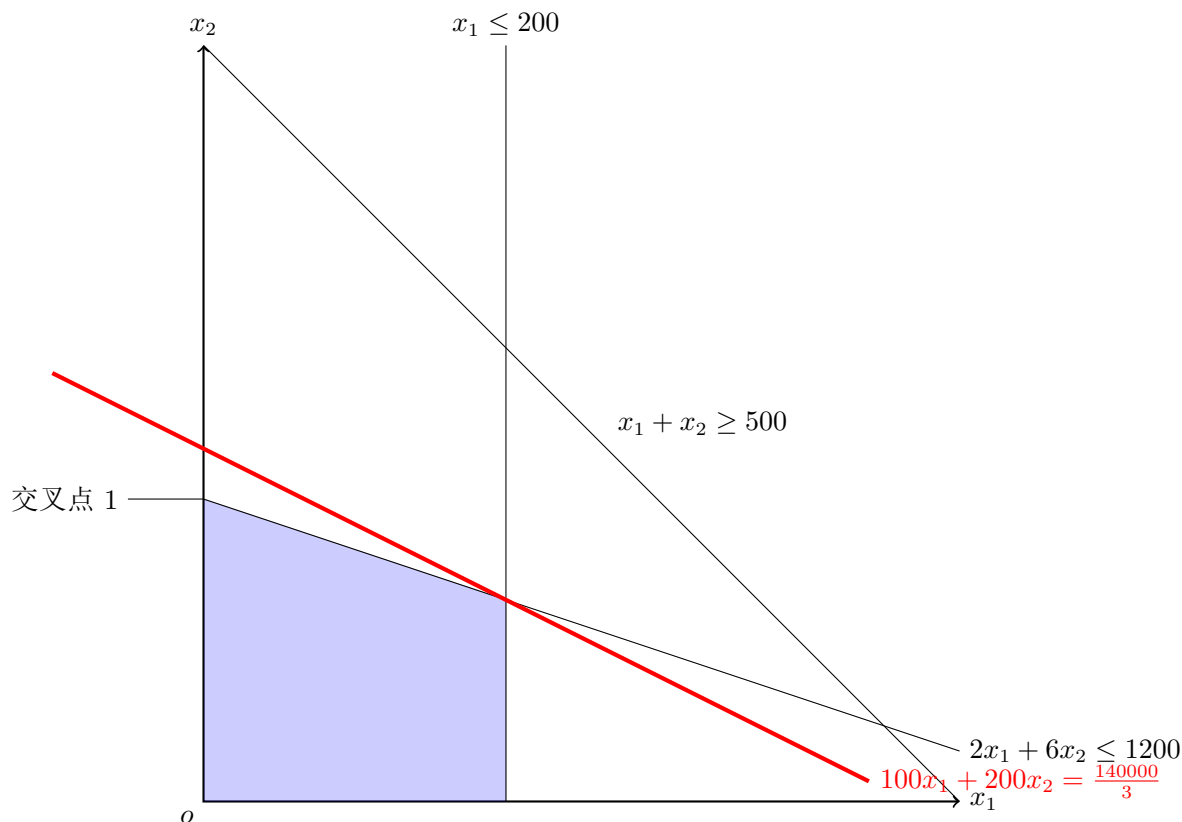
$$\begin{aligned} \max Z &= 40000 + \frac{20000}{3} - \frac{100}{3}x_4 - \frac{50000}{3}x_5 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_3 = \frac{500}{3} + \frac{2}{3}x_4 + \frac{250}{3}x_5 \\ x_1 = 200 - x_4 \\ x_2 = \frac{400}{3} + \frac{1}{3}x_4 - \frac{250}{3}x_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

此时，基变量为 x_1, x_2 和 $x_3, x_4 = x_5 = 0$ 为非基变量，从而可得 $x_1 = 200, x_2 = \frac{400}{3}, x_3 = \frac{500}{3}$ ，目标函数值为 $\frac{140000}{3}$ ，对应的基本可行解为 $(200, \frac{400}{3}, \frac{500}{3}, 0, 0)$ ，对应图解法中的最优解所在点。

至此，目标函数表达式中的变量系数均为负，无须再进行迭代，已经找到最优解，最优解为 $(200, \frac{400}{3})$ 。

从上述两个题目中，可以得知，单纯形方法与图解法之间存在一定的关系，当变量为两个时，图解法可以快速的得到线性规划的解。当多于两个变量时，图解法将难以直观表达。而单纯形法，需要将线性规划转化为标准形，并通过确定基变量，并令非基变量的值等于 0，找到基本可行解，然后通过不断旋转（即转换顶点），直到不能再改变目标函数值为止。

图解法：



1.5 用单纯形法求解某线性规划问题得到最终单纯形表如表 1-14所示

表 1-14

$c_j \rightarrow$			50	40	10	60
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
m	c	6	0	1	1/2	1
n	d	4	1	0	1/4	2
$c_j - Z_j$			0	0	e	f

要求:

- (1) 给出 m, n, c, d, e, f 的值或表达式。
- (2) 指出该问题是求目标函数的最大值还是最小值, 并求出目标函数值。

解: (1) 由于表 1-14 为最终单纯形表, 需要为线性无关的单位列向量, 则其对应的基向量为 x_2 和 x_1 。因此, $m = 40, n = 50, c = x_2, d = x_1$, 此时, $e = -22.5, f = -80$ 。

(2) 由于检验数都为小于等于 0 的数, 因此, 该问题目标函数是求最大值, 并且其最大值为 440。

1.6 分别用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划问题，并指出问题解的特征规划及单纯形法

1.6 分别用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划问题，并指出问题解的特征

(1)

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解：大 M 法：

由约束可知，由于只有 x_4 一个基变量。因此，需要增加 x_5 和 x_6 两个人工变量，并更新目标函数值，具体转化结果如下：

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - Mx_5 - Mx_6 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \\ \text{其中，} M \text{ 为极大正数} \end{cases} \end{aligned}$$

通过上述转化，对应的系数矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，从而构造初始单纯形表，并

计算检验数 σ_j 和 θ_i ，具体如下：

c_j			1	2	3	-1	-M	-M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-M	x_5	15	1	2	3	0	1	0	5
-M	x_6	20	2	1	5	0	0	1	4
-1	x_4	10	1	2	1	1	0	0	10
σ_j			2+3M	4+3M	4+8M	0	0	0	

根据上述初始单纯形表，可以选择进基变量为 x_3 ，而出基变量为 x_6 ，于是可得到如下单纯形表：

根据上述初始单纯形表，可以选择进基变量为 x_2 ，而出基变量为 x_5 ，于是可得到如下单纯形表：

此时，根据上述初始单纯形表可知， $\sigma_j \leq 0$ ，且基变量中无人工变量。因此，存在最优解，最优解为 $(0, -15/7, 155/7.115/21, 0, 0)^T$

两阶段法：同样增加人工变量 x_5 和 x_6 ，然后根据两阶段法，构造第一阶段问题如下所示：

1.6 分别用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划问题，并指出问题的最优解及单纯形法

c_j			1	2	3	-1	-M	-M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-M	x_5	-1	-1/15	7/15	0	0	1/3	-1/5	-15/7
3	x_3	4	2/5	1/5	1	0	0	1/5	20
-1	x_4	6	3/5	9/5	0	1	0	-1/5	10/3
σ_j			$\frac{2}{5}-\frac{1}{15}M$	$\frac{6}{5}+\frac{7}{15}M$	0	0	$-\frac{2}{3}M$	$-\frac{4}{5}-\frac{6}{5}M$	

c_j			1	2	3	-1	-M	-M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	x_2	-15/7	-1/7	1	0	0	5/7	-3/7	
3	x_3	155/7	15/7	0	5	0	-5/7	10/7	
-1	x_4	115/21	10/21	0	0	5/9	-5/7	20/63	
σ_j			-14/3	0	-12	-4/9	-M	-M-3	

$$\begin{aligned} \min W &= x_5 + x_6 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

针对第一阶段问题，可以进行标准化，转化为 $\max Z = -x_5 - x_6$ ，构建初始单纯形表，这里不再赘述，也可以直接构建初始单纯形表，为增加结果多样性，在这里采用直接构建单纯形表，具体结果如下：

c_j			0	0	0	0	1	1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_5	15	1	2	3	0	1	0	5
1	x_6	20	2	1	5	0	0	1	4
0	x_4	10	1	2	1	1	0	0	10
σ_j			-3	-3	-8	0	0	0	

针对上述单纯形表，可以得知 x_3 作为进基变量，对应出基变量为 x_6 ，从而进一步计算得到如下单纯形表：

针对上述单纯形表，需要进一步迭代，选择 x_2 作为进基变量， x_5 作为出基变量，从而可以得到如下单纯形表：

根据上述初始单纯形表可知， $\sigma_j \geq 0$ ， $x_5 = x_6 = 0$ 。因此，原问题存在可行解。

因此，构造第二阶段问题，具体如下：

1.6 分别用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划问题，并指出问题的最优解及单纯形法

c_j			0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
1	x_5	3	-1/5	7/5	0	0	1	-3/5	15/7
0	x_3	4	2/5	1/5	1	0	0	1/5	20
0	x_4	6	3/5	9/5	0	1	0	-1/5	10/3
σ_j			1/5	-7/5	0	0	0	3/5	

c_j			0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
0	x_2	3	-1/7	1	0	0	5/7	-3/7	-
0	x_3	17/5	11/25	0	1	0	-5/7	4/25	
0	x_4	13/3	32/45	0	0	1	-5/7	2/15	-
σ_j			0	0	0	0	1	1	

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

根据第一阶段解，以及第二阶段问题，即可构建单纯形表，其中增广矩阵，为直接采用第一阶段最终单纯形表的增广矩阵去掉人工变量列，具体如下：

c_j			1	2	3	-1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ_i
2	x_2	3	-1/7	1	0	0	-
3	x_3	17/5	11/25	0	1	0	85/11
-1	x_4	13/3	32/45	0	0	1	195/32
σ_j			> 0	0	0	0	

根据上述初始单纯形表，可以将 x_1 作为进基变量， x_4 作为出基变量，从而得到最优解。

(2)

$$\begin{aligned} \max Z &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 16 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解：大 M 法

1.7 表 1-15中给出某求目标函数极大的线性规划问题的单纯形表，问表中 a_1, a_2, f_1, f_2, d 为何值或表中变量有何特征时，有

第 1 章 线性规划及单纯形法

首先，转化为标准型，具体如下：

$$\begin{aligned} \max Z &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ s.t. \quad &\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_5 = 20 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_6 = 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

当前标准型下，只有 x_5 和 x_6 两个为互不相关的基变量。因此，加入人工变量 x_7 到第一个约束条件，从而可用大 M 法和两阶段法进行求解。

1.7 表 1-15中给出某求目标函数极大的线性规划问题的单纯形表，问表中 a_1, a_2, f_1, f_2, d 为何值或表中变量有何特征时，有

- (1) 表中解为唯一最优解？
- (2) 表中解为多重最优解？
- (3) 表中解为退化解？
- (4) 下一步迭代将以 x_1 替换基变量 x_5 ？
- (5) 该线性规划问题具有无界解？
- (6) 该线性规划问题无可行解？

表 1-15

X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	d	4	a_1	1	0	0
x_4	2	-1	-5	0	1	0
x_5	3	a_2	-3	0	0	1
$c_j - Z_j$		f_1	f_2	0	0	0

答：要使（1）成立，按照单纯形法的最优解性质可知，则有 $f_1 \leq 0$ 和 $f_2 \leq 0$ ，且 $d \geq 0$ ， a_1, a_2 可以取任意值。

要使（2）成立，要求非基变量检验数等于零，即 $f_1 = 0$ 或者 $f_2 = 0$ 。

要使（3）成立，即存在同样 θ_i 的值，由于 x_2 中有-5和-3，而 x_1 中有-1。因此，只能有 $f_1 > 0$ ， $a_2 > 0$ ，且 $d/4 = 3/a_2$ ，即 $d * a_2 = 12$ 。

要使（4）成立，即 $f_1 > f_2$ ，且 $f_1 > 0$ ，要使 x_1 替换 x_5 ，则 $d/4 > 3/a_2$ 。

要使（5）成立，则有 $f_2 > 0$ ，且 $a_1 < 0$ 。

要使（6）成立，则有 $d = 0$ 。