

运筹学习题解答

第 12 章 排队论

12.1 顾客来到某快餐店的平均到达率为 75 人/h，店内有三名服务员，到达店内的顾客排成一列，按先到先服务的规则服务，每名服务员服务一个顾客的平均时间为 2min。求该系统内服务员的平均繁忙率。

解：根据题意，该题为 M/M/C/∞/∞/FCFS 排队系统，单位时间内顾客平均到达率 $\lambda = \frac{75}{60}$ ，单位时间内服务员的平均服务率 $\mu = \frac{1}{2}$ 。因此，服务员数 $s = 3$ ，则每个服务员的平均繁忙率 $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{75}{60 \cdot 3 \cdot 1/2} = 0.83$

12.2 某工厂工具检测部门，要求检测的工具来自该工厂各车间，平均 25 件/h，服从泊松分布，检测每件工具的时间为负指数分布，平均每件 2min。试求：

- (1) 该检测部门空闲的概率；
- (2) 一件送达的工具到检测完毕，其停留时间超过 20min 的概率；
- (3) 等待检测的工具平均数；
- (4) 等待检测的工具在检测部门平均逗留时间；
- (5) 等待检测的工具在 8~10 件间的概率。

解：根据题意，该题可以看成是 M/M/1/∞/∞/FCFS 排队系统，单位时间内平均到达率 $\lambda = \frac{25}{60}$ ，单位时间内服务台的平均服务率 $\mu = \frac{1}{2}$ ，则：

(1) 空闲概率 $P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{25}{60 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$ 。

(2) 一件送达的工具到检测完毕，停留时间超过 20min 的概率 $P(T > 20)$ ，由于服务时间服从负指数分布，其概率密度函数为 $f(t) = \mu e^{-\mu t}$ ，因此，停留时间超过 20 分钟的概率 $P(T > 20) = e^{-\mu \cdot 20} = e^{-10}$ 。

(3) 等待检测的工具平均数 $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$ 。

(4) 等待检测的工具在检测部门平均逗留时间 $W_q = \frac{1}{\mu - \lambda}$ 。

(5) 等待检测的工具在 8~10 件间的概率 $P(8 < L_q < 10)$ ，对于 M/M/1/∞/∞/FCFS 排队系统，等待队列中工具数的概率分布为几何分布，但直接计算这个区间的概率较为复杂，但是可以通过 $P(8)$ 、 $P(9)$ 、 $P(10)$ 计算近似为 $P(8 < L_q < 10) = P(9) + P(10)$ 。

12.3 某铁路售票处设有两个售票窗口，有两种售票方式可供选择：一种是两个窗口分别发售上行和下行的客票；另一种售票方式是两个窗口均发售两个方向的客票。如果旅客按泊松流到达，两个方向的到达强度相同，都为 0.45 人/min，发售一张客票的平均时间为 2min。问哪种售票方式较好。

12.4 货运车以泊松流到达，平均每小时 8 辆，用吊车卸货，一台吊车卸一辆汽车的平均时间为 12min，服从负指数分布。问用两台吊车同事卸一辆汽车和各卸一辆汽车，哪一种作业方式好些？为什么？

12.5 汽车按泊松分布到达某告诉公路收费口，平均每小时 90 辆，每辆车通过收费口平均需要 35s，服从负指数分布，由于一些司机抱怨等待交费时间太长，管理部门拟采用自动收费装置使收费时间缩短到 30s，但条件是原收费口平均等待车辆超过 6 辆，且新装置的利用率不低于 75%时才采用。问上述条件下，新装置是否被采用？

12.6 某医院有一台心电图机，要求做心电图的病人按泊松分布到达，平均每小时 5 人，又为每名病人做心电图时间服从负指数分布，平均每人 10min，设心电图室除正做的病人外，尚有 5 把等待的椅子。问

(1) 到达的病人中有多大比例能有椅子坐；

(2) 为使到达的病人至少有 95%以上能有椅子坐，则在心电图室至少应该设多少把等待的椅子。

12.7 某场篮球比赛前来到体育馆某售票窗口买票的观众按泊松分布到达，平均每小时 60 人，设该售票口售票时间服从负指数分布，平均售一张票时间为 20s，试回答：

(1) 如有一个球迷于比赛前 2min 到达售票口，买到票后需 1.5min 后才能找到座位坐下，求该球迷在比赛开始前找到座位坐下的概率；

(2) 如该球迷希望有 99%的把握在比赛开始前找到座位坐下，他至少应该提前多少时间到达售票口。

12.8 某停车场有 10 个停车位，汽车到达服从泊松分布，平均 10 辆/h，每辆汽车停留时间服从负指数分布，平均 10min，试求：

(1) 停车位置的平均空闲数；

(2) 到达汽车能找到一个空位停车的概率；

(3) 在该场地停车的汽车占总到达的比例；

(4) 每天（24h）在该停车场找不到空闲位置停放的汽车的平均数。

12.9 一台机器维修工负责 5 台机器维修，已知每台机器平均 2h 发生一次故障，服从负指数分布，该工人的维修速度为 3.2 台/h，服从泊松分布，试求：

(1) 全部机器处于运行状态的概率；

(2) 等待维修的机器平均数；

(3) 若该维修工人负责 6 台机器维修，其他各项数字不变，则上述（1）（2）的结果又如何？

(4) 若希望至少 50%时间内所有机器能正常运转，求该维修工人最多负责的机器数。

12.10 某车站的卸车设备有甲、乙和丙三个方案可供选择，要求选择总费用最小的方案，有关费用如表 12-3 所示，设货车按泊松分布到达，平均每天（按 10h 计）到达 15 辆，每辆车平均装有货物 500 件，卸车时间服从指数分布，一辆车停留 1h 的费用为 10 元。

表 12-3

方案	固定费用（元/天）	运转费用（元/天）	卸车强度（件/h）
----	-----------	-----------	-----------

甲	60	100	1000
乙	130	150	2000
丙	250	200	6000