

运筹学课后习题解答

第 2 章 对偶问题及灵敏度分析

2.1 写出下列线性规划问题的对偶问题模型

(1)

$$\begin{aligned} \max Z &= 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 3 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解：根据对偶理论，原问题系数矩阵进行转置作为对偶问题约束条件系数矩阵，目标函数价值系数转化为对偶问题约束条件右边常数项，max 变量的不等号与 min 约束条件的不等号方向相同，max 约束条件的不等号与 min 变量的不等号方向相反，约束条件的“=”对应变量的“无约束”，可以得到如下对偶问题。

$$\begin{aligned} \min S &= 5y_1 + 3y_2 + y_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 2 \\ 2y_1 - 3y_2 + 8y_3 \geq 4 \\ -3y_1 - 2y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{ 无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \min S &= 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + x_3 \leq -4 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \text{ 无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

解：根据对偶理论，原问题系数矩阵进行转置作为对偶问题约束条件系数矩阵，目标函数价值系数转化为对偶问题约束条件右边常数项，max 变量的不等号与 min 约束条件的不等号方

向相同, $\max$ 约束条件的不等号与 $\min$ 变量的不等号方向相反, 约束条件的 “=” 对应变量的 “无约束”, 可以得到如下对偶问题。

$$(3) \quad \begin{aligned} \max Z &= 5y_1 - 4y_2 + 10y_3 \\ s.t. \quad &\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ y_1 \leq 4 \\ -y_1 + y_2 + y_3 \geq -6 \\ 2y_1 + y_3 = 0 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{ 无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

解: 根据对偶理论, 原问题系数矩阵进行转置作为对偶问题约束条件系数矩阵, 目标函数价值系数转化为对偶问题约束条件右边常数项, $\max$ 变量的不等号与 $\min$ 约束条件的不等号方向相同, $\max$ 约束条件的不等号与 $\min$ 变量的不等号方向相反, 约束条件的 “=” 对应变量的 “无约束”, 通过用 $x'_1 = x_1 + 1$ 等表示, 可以得到如下对偶问题。

$$\begin{aligned} \max Z &= 6y_1 + 11y_2 + 4y_3 + y_4 \\ s.t. \quad &\begin{cases} y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq -2 \\ y_3 \leq 0 \\ y_4 \text{ 无约束} \end{cases} \end{aligned}$$

2.2 已知线性规划问题原问题最优解, 求对偶问题最优解

$$\begin{aligned} \min S &= 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 \\ s.t. \quad &\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 6 \\ x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 \geq 2 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

(1) 写出其对偶问题

解: 根据上述对偶理论, 可以直接写出其对偶问题, 具体如下:

$$\begin{aligned} \max Z &= 3y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 2y_4 \\ s.t. \quad &\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_4 \leq 3 \\ 2y_1 + y_2 \leq 6 \\ y_2 + y_3 + y_4 \leq 3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq 6 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{ 无约束}, y_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 已知原问题最优解为 $\mathbf{X}^* = (1, 1, 2, 0)^T$, 试根据对偶理论, 直接求出对偶问题最优解。

解: 根据对偶问题的性质, 原问题有最优解, 则对偶问题也有最优解, 且目标函数值相等, 从而可以得到 $C\hat{X} = \hat{Y}b$, 由已知条件可得, $C = (3, 6, 2, 2)$, $\hat{X} = (1, 1, 2, 0)^T$, $b = (3, 6, 3, 6)^T$, 即 $(3, 6, 4, 0) = \hat{Y}(3, 6, 3, 6)^T$ 。因此, 可得 $\hat{Y} = (1, 1, 4/3, 0)$

2.3 已知线性规划问题对偶问题最优解, 求原问题最优解

$$\begin{aligned} \min S &= 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ s.t. \quad &\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 \leq 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 12 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

(1) 已知对偶问题的最优解 $y_1^* = 4, y_2^* = 1$, 试根据对偶问题的性质, 求出原问题的最优解。

解: 首先, 写出其对偶问题, 具体如下:

$$\begin{aligned} \max Z &= 3y_1 + 12y_2 \\ s.t. \quad &\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ 2y_2 \leq 1 \\ y_1 + y_2 \leq 5 \\ y_1 + 2y_2 \leq 6 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

根据对偶问题互补松弛性可知, $Y_s\hat{X} = 0, \hat{Y}X_s = 0$, 则原问题的最优解为 $(0, 0, -6, 9)^T$ 。

2.4 用对偶单纯形法求解下列线性规划问题

(1)

$$\begin{aligned} \min S &= 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ s.t. \quad &\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \min S &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \\ s.t. \quad &\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \geq 0 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 \geq 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 \geq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$