



中南大學
CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

矿业系统工程

资源与安全工程学院
采矿工程系 杨珊 副教授



第三章 数学规划法

第三章 数学规划法

- 1 线性规划法**
- 2 整数规划法**
- 3 多目标规划法**
- 4 非线性规划**
- 5 动态规划**

第一节 线性规划法

线性规划是运筹学中理论最完善、方法最成熟，并广泛应用的分支。许多实际问题都可以用线性规划问题来表示。

- 在20世纪30年代,苏联数学家**利奥尼德·康托洛维奇**(L.V.Kantorovich)首先**提出了线性规划的模型**。随后，人们对线性规划问题的求解进行了广泛研究。
- 1947年美国数学家**乔治·伯纳德·丹齐格** (G. B. Dantzig)**提出单纯形法求解线性规划**，是应用最广泛的求解方法，标志着线性规划在理论和方法上日臻完善。
- 近几十年来，线性规划取得了重大的进展，**Karmarkar内点法的提出**和计算机技术日新月异的发展,使得有成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题能被快速地求解，为线性规划的广泛应用提供了极其有利的条件。

第一节 线性规划法

线性规划的理论方法的应用已经成为现代管理、工程设计、经济规划等的重要手段之一,在矿业领域也得到了广泛的应用。

线性规划主要研究两类问题:

- 在现有资源有限的条件下,如何合理地安排,才能以最少的人力、物力资源去完成任务。
- 在任务确定后,如何计划、安排,才能在完成任务的前提下,使得现有资源的消耗最低。

这两类问题本质是一样的,即在**一组约束条件下,使某一目标达到最优。**

第一节 线性规划法

一、线性规划问题及数学模型

例2.1 (生产组织问题) 假设某矿开采两个矿层，第一层精矿采出率为20%，第二层的精矿采出率为30%。由于生产工艺环节上的限制，第一矿层的最大年产量不超过50万t，第二矿层的最大年产量不超过20万t。由于采掘工作超前条件的限制，第二层矿石年产量不能超过第一层矿石的年产量。按照矿石的供销情况，矿山精矿年产量不应超过12万t。试确定这两个矿层的合理年产量，使得全矿产量为最大。

第一节 线性规划法

解：设第一矿层的产量为 x_1 万t / a，第二矿层的产量为 x_2 万t / a，
根据已知条件可建立如下数学模型：

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 \leq 50 \\ x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq x_1 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

第一节 线性规划法

例2.2(运输问题) 某矿区有3个矿井 A_1 , A_2 , A_3 , 所产矿石全部运到两个选厂 B_1 , B_2 。各矿日产量及选厂的洗选能力, 各矿到选厂的吨矿运价如表所示。试问如何分配各矿井运往各选厂的矿量才能使总的运费最省。

表2-1 矿井到选厂的吨矿运价

选厂 矿区	B_1	B_2	矿区日产矿石量 /(t/d)
A_1	$C_{11}=4$ X_{11}	$C_{12}=6$ X_{12}	600
A_2	$C_{21}=1$ X_{21}	$C_{22}=5$ X_{22}	900
A_3	$C_{31}=3$ X_{31}	$C_{32}=4$ X_{32}	1000
选厂生产能力 /(t/d)	1000	1500	2500

第一节 线性规划法

解：设 C_{ij} 表示由 A_i 矿运往 B_j 选厂的吨矿运价， X_{ij} 表示由 A_i 矿运往 B_j 选厂矿量（ $i=1,2,3;j=1,2$ ）。如 C_{11} 表示由 A_1 矿到 B_1 选厂的吨矿运价， X_{11} 表示 A_1 矿运往 B_1 选厂的矿量等。根据已知条件可建立如下数学模型：

$$\min z = 4x_{11} + 6x_{12} + x_{21} + 5x_{22} + 3x_{31} + 4x_{32}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_{11} + x_{12} = 600 \\ x_{21} + x_{22} = 900 \\ x_{31} + x_{32} = 1000 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1500 \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2) \end{cases}$$

第一节 线性规划法

例2.3(配矿问题) 有3个矿井向一家工厂提供炼焦煤。精煤产量应不少于3500 t / d，有关煤的数量与质量、采煤费用以及运煤到工厂的费用、铁路通过能力等数据如表2-2所列。试求如何安排煤炭运量，才能使总费用最少。

表2-2 矿井产煤量、煤质、生产费用及铁路运输能力

矿井编号	昼夜产煤量 /t	灰分 /%	含硫量 /%	精煤回收率 /%	由矿井到工厂铁路的通过能力 /(t/d)	开采和运输吨煤费用/元
1	2200	14	2.0	75	2400	14
2	2500	20	0.8	60	2400	10
3	1500	16	1.2	75	1200	12
工厂订货		≤17	≤1.4			最小值

第一节 线性规划法

解：设 x_1 ， x_2 ， x_3 分别为1，2，3号矿井分别运给工厂的煤量。

可列出如下的约束条件表达式：

精煤量的约束条件为： $0.75x_1+0.6x_2+0.75x_3\geq 3500$

矿井采煤量的约束条件为： $x_1\leq 2200, x_2\leq 2500, x_3\leq 1500$

铁路通过能力的约束条件为： $x_1\leq 2400, x_2\leq 2400, x_3\leq 1200$

灰分的约束条件为： $0.14x_1+0.2x_2+0.16x_3\leq 0.17(x_1+x_2+x_3)$

含硫量的约束条件： $0.02x_1+0.008x_2+0.012x_3\leq 0.014(x_1+x_2+x_3)$

第一节 线性规划法

经整理，可得到数学模型：

$$\begin{aligned} \min z &= 14x_1 + 10x_2 + 12x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 0.75x_1 + 0.6x_2 + 0.75x_3 \geq 3500 \\ x_1 \leq 2200 \\ x_2 \leq 2400 \\ x_3 \leq 1200 \\ -0.03x_1 + 0.03x_2 - 0.01x_3 \leq 0 \\ 0.006x_1 - 0.006x_2 - 0.002x_3 \leq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

第一节 线性规划法

上述三个例子描述的问题就是**线性规划问题**，线性规划问题的数学模型就是线性规划模型。

所有线性规划问题都具有以下共同特征：

- 每一个问题都可以用**一组变量**表示某一方案。一般情况下，变量均为**非负**。
- 约束条件用**线性等式或不等式**表示。
- 都有一个**目标函数**，要求实现**最大化或最小化**，且该目标函数可表示为一组变量的线性函数。

第一节 线性规划法

由于问题的性质不同，线性规划模型也有不同的形式，可以描述为：

$$\begin{aligned} \max(\text{或} \min) z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s. t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (\text{或} =, \text{或} \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq (\text{或} =, \text{或} \geq) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (\text{或} =, \text{或} \geq) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

s.t.是subject to
(以...为条件)的
缩写。

式中， z 为目标函数； $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为决策变量。

$c_1, c_2, \cdots, c_n$ ； $b_1, b_2, \cdots, b_m$ ； $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$ ； $a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}$ ；

$a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}$ 都是常数。

这是线性规划问题的一般数学模型。

第一节 线性规划法

二、线性规划模型的标准型及转化

线性规划模型中约束条件出现了三种形式($\leq$, $=$, $\geq$), 目标函数存在两种形式(max, min)。这种多样性给讨论问题带来不便, 因此规定了线性规划模型的标准型(标准形式):

$$\begin{aligned} \max Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s. t. } &\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

第一节 线性规划法

可以转化为

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

这里假设 $b_i \geq 0$ 。

第一节 线性规划法

引入如下向量 $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

和矩阵: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

$$p_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$



向量形式为:

$$\begin{aligned} \max z &= CX \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \sum_{j=1}^n p_j x_j = b \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

矩阵形式为:

$$\begin{aligned} \max z &= CX \\ \text{s. t. } &\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

式中, A 为约束方程组的系数矩阵($m \times n$ 阶), 一般情况下 $m < n$; m 为线性规划的阶数(约束方程的个数); n 为线性规划的维数(未知量个数); b 为限定向量; C 为价值向量。

第一节 线性规划法

三、线性规划问题解的概念

线性规划问题：

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

可行解 满足上述约束条件的解，称为线性规划问题的可行解。全部可行解的集合称为可行域。

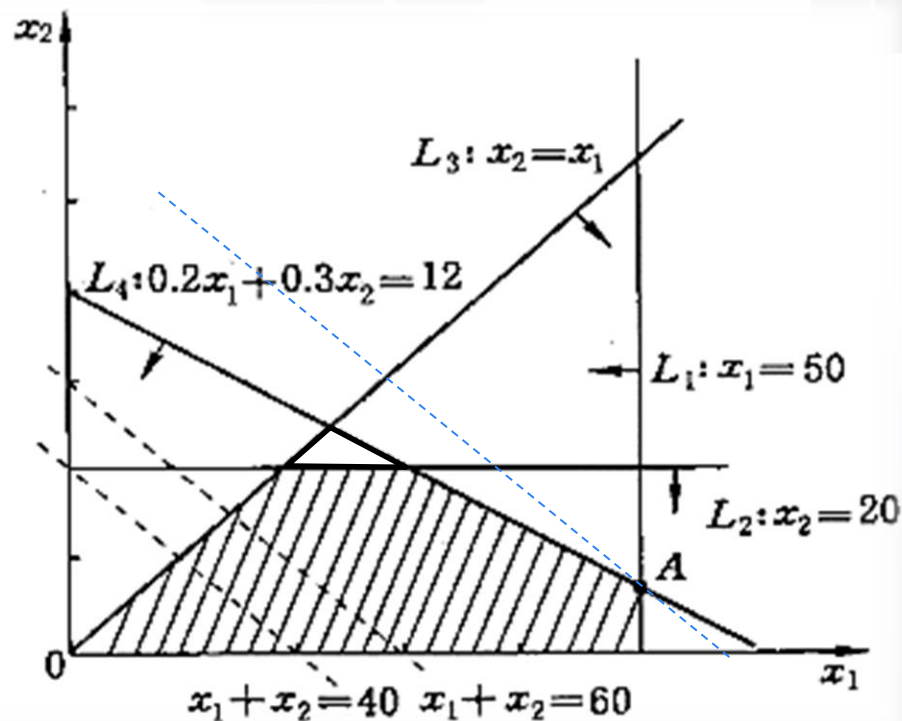
最优解 使目标函数达到最大值的可行解称为最优解。

第一节 线性规划法

四、线性规划的图形法

例2.1的数学模型如下：

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s. t. } \begin{cases} x_1 \leq 50 \\ x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq x_1 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

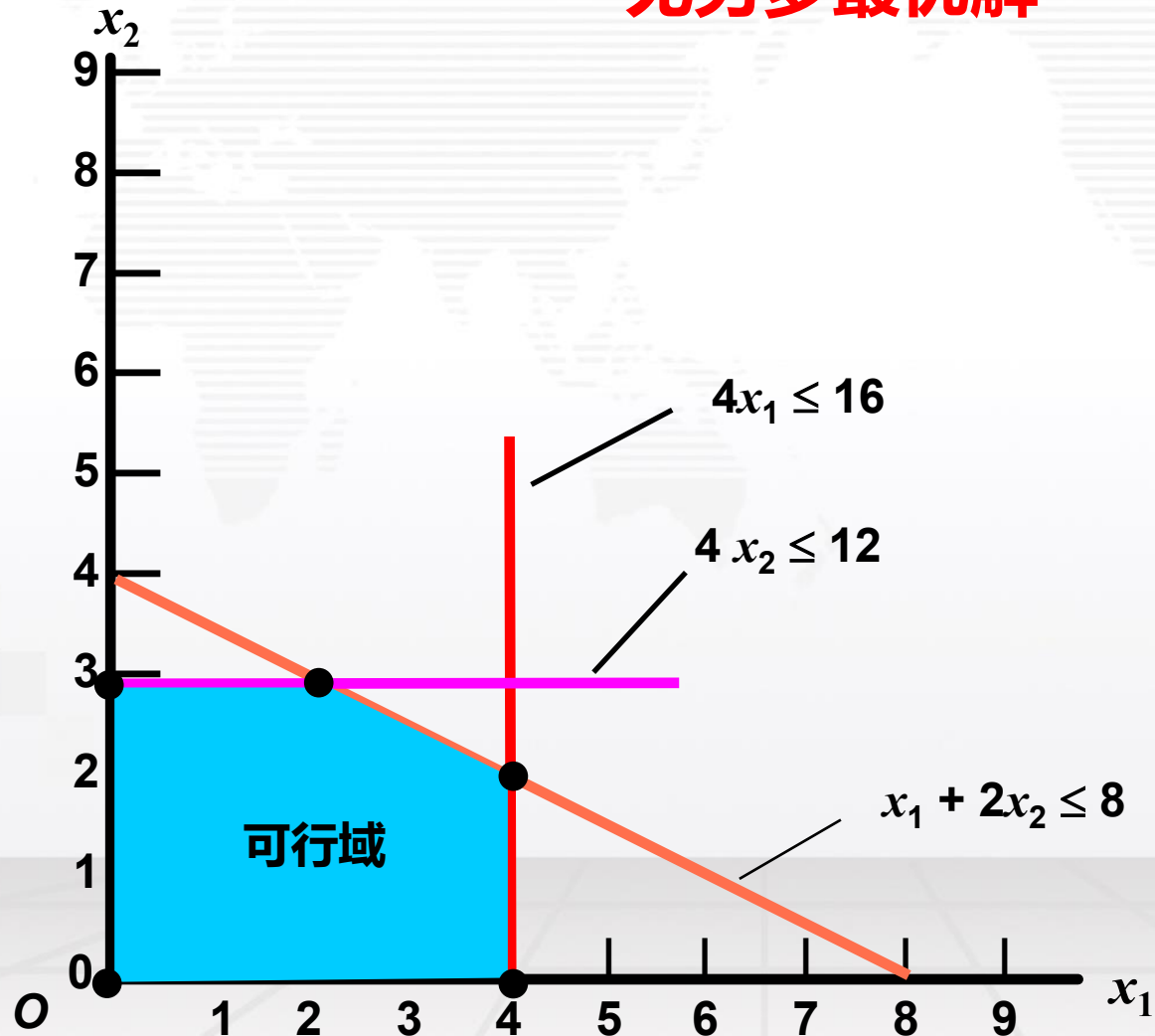


图中的点A (50, 20/3) 为最优点，最优解 $Z = 170/3$

可能情况：会存在多个最优解、无可行解、有无界解

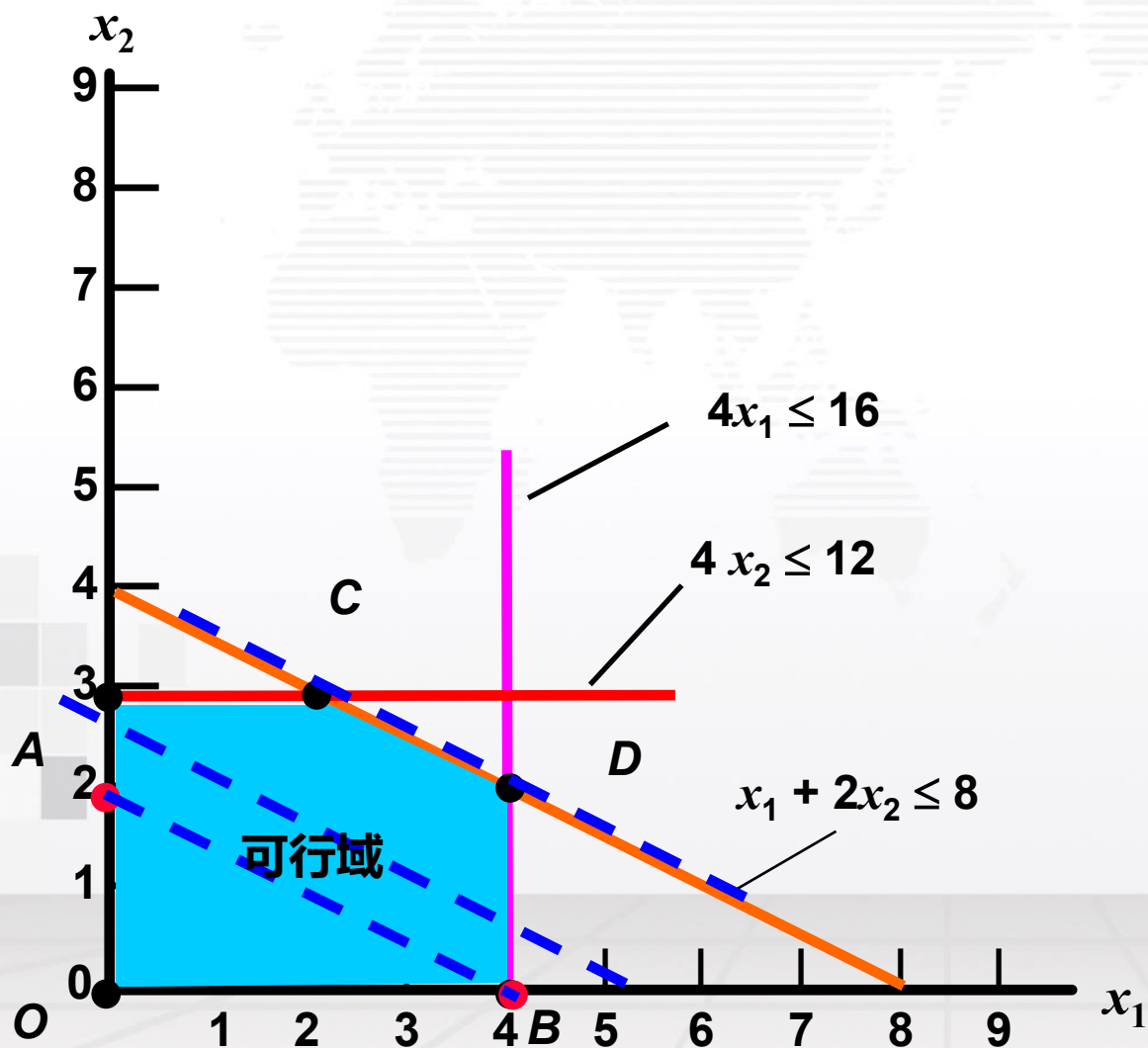
第一节 线性规划法

无穷多最优解



$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

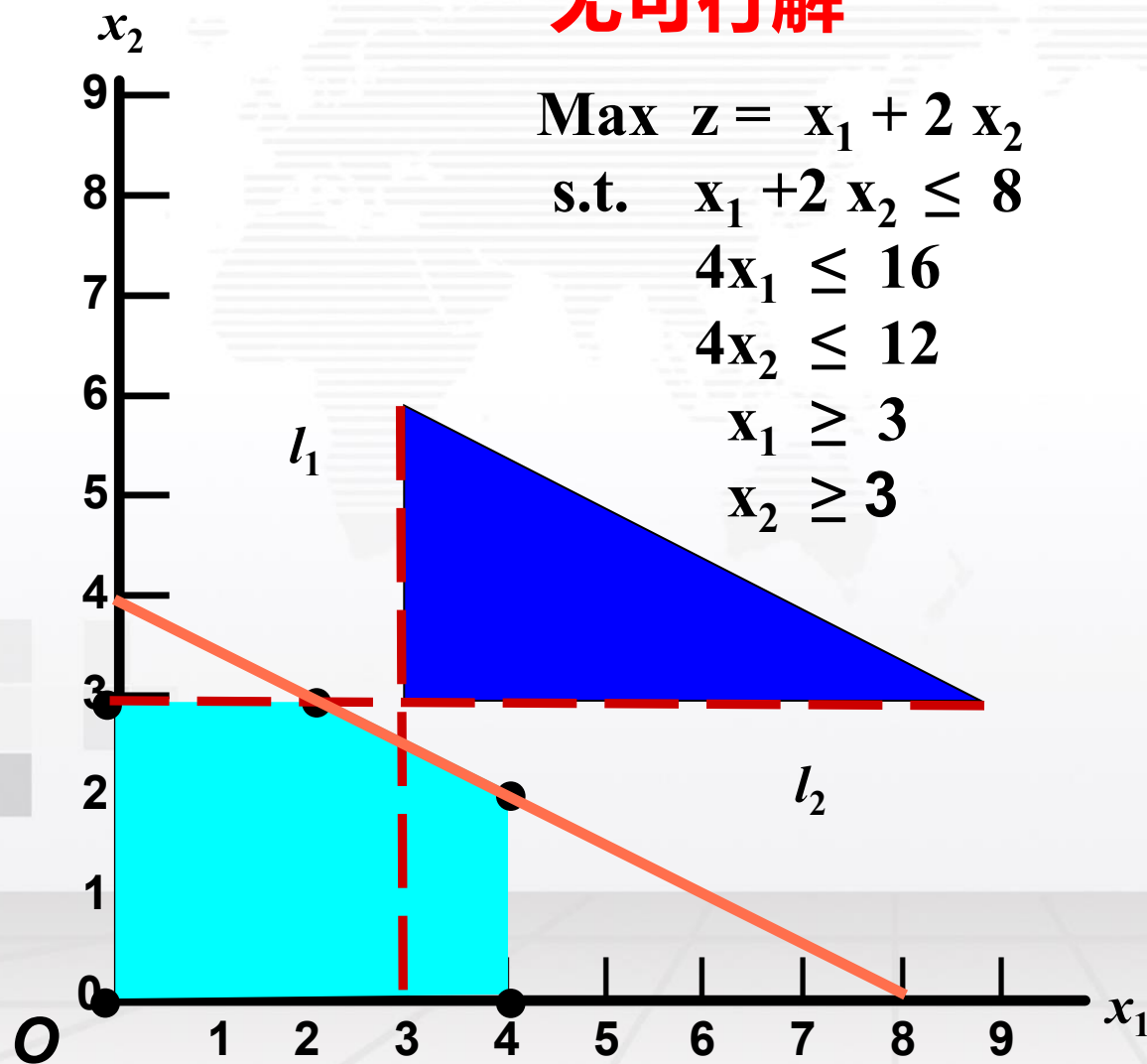
第一节 线性规划法



- 当移动等值线AB时，Z值在线段CD上实现最大化。线段CD上的任意一点都使Z取得相同的最大值，这个线性规划问题有**无穷多最优解**。
- 最优解在目标函数直线与可行域边界的交点处达到。如果目标函数等值线与可行域的一个边界所在的约束直线重合，出现这种情况时，则问题就有多个最优解。
- 对于有多个最优解的线性规划问题，则意味着有很多决策变量的组合可供选择，决策者可从中选择一个最理想的。

第一节 线性规划法

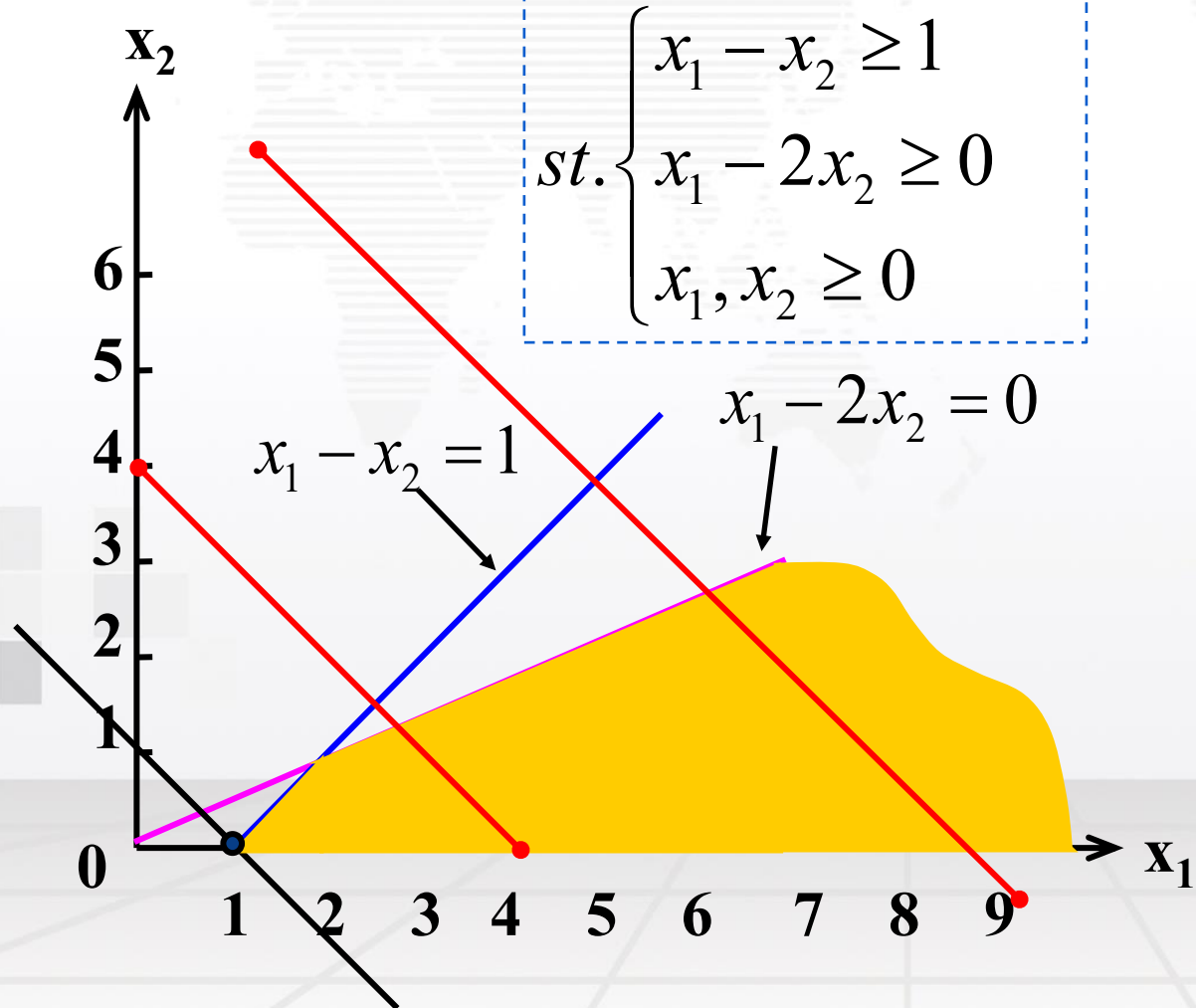
无可行解



- 可行域为空集，无可行解，也无最优解。
- 如果没有一个点能同时满足所有的约束条件和非负条件，则可行域不存在。因此，目标函数也就不可能与可行域相交，此时没有可行解。
- 一般情况下，如果问题不存在可行解，一般与目标函数无关，说明约束条件过于严格，通常解决方法是去掉一个或多个约束条件。如果修改后的问题有最优解，则说明去掉的这些约束条件导致问题无可行解。

第一节 线性规划法

无界解



- 当目标函数等值线的k值无限增大时, 该等值线仍在可行域中, 即如果线性规划问题的解无限地变大时, 仍满足约束条件, 对于这样的最大化问题的解称为无界解。对于最小化问题, 如果它的可行解可以无限地变小时, 仍满足约束条件, 则它的解亦称为是无界的。
- 在实际问题中, 如果出现线性规划的解是无界的, 则说明所建立的数学模型没有能真实地反映实际问题。其原因通常是遗漏了一些约束条件。

第一节 线性规划法

■ 线性规划法在采矿中的应用

- ✓ **配矿问题。**将不同品级的矿石按要求混合。
- ✓ **采掘进度计划的编制。**在满足矿山各种生产技术约束条件的前提下，使采掘工作的经济效果最佳。
- ✓ **露天矿排土工作组织。**根据排土场的位置及容量，合理安排各工作面的排土路线，使排土工作的经济效果最佳。

第一节 线性规划法

■ 线性规划法在采矿中的应用

- ✓ **矿山生产调度。**运用线性规划，合理调度矿山大型设备，提高矿山的经济效益。
 - ✓ **运输问题。**根据货源产量、用户需求量及运输成本，合理安排运输计划使总的运输成本最低。
 - ✓ **生产布局。**根据联合企业所属矿山、选厂、冶炼厂的生产能力、生产成本和运输费用，合理组织生产任务，使企业盈利最大。
- 此外，有关**人力、设备、原料和产品的调配问题**，都可以用线性规划处理。

第三章 数学规划法

- 1 线性规划法
- 2 整数规划法
- 3 多目标规划法
- 4 非线性规划
- 5 动态规划

第二节 整数规划法

整数规划中全部变量都必须为整数时，称为**纯整数规划**；如果只要求部分变量必须为整数，则称为**混合整数规划**。整数规划的一种特殊情形是它的变量取值仅限于0或1，称为**0-1整数规划**。

□ 整数规划法在采矿中的应用

- ✓ **采掘进度计划的编制**。矿山中，每个矿块是开采或不开采，可分别用0或1两个数表示，从而构成0-1整数规划。
- ✓ **矿山设备和人员的安排**。露天矿中电铲的配车问题，其车数只能是整数，就使用整数规划求解。

第二节 整数规划法

一、分支定界法

- **分支定界法**用搜索的方法来寻求最优整数解，它通过考虑整数规划问题的**连续形式**来求解整数问题。
- **分支**：把整数规划问题按连续变量线性规划模型求解。假定 x_r 是一个有整数约束的变量，而它的最优连续值 x_r^* 是分数。区间 $([x_r^*], [x_r^*] + 1)$ 内不包含任何整数， x_r 的可行整数解必满足两个条件 $x_r \leq [x_r^*]$ 或 $x_r \geq [x_r^*] + 1$ 之一。把这两个条件作为约束条件加到原来的可行域中去，使原来的可行域被分割为两个部分，相应地把这个约束条件分别加入原问题中去，**形成两个互斥的问题**。原来的问题被分割为两个部分问题，利用整数性的必要条件，在划分的过程中**删去不含可行整数点的部分连续空间**，从而**缩小原来作为连续变量线性规划问题的可行域**。

第二节 整数规划法

一、分支定界法

- 定界：如果一个部分问题的连续最优解的目标函数值比已得到的最好整数解的目标函数值还差，那么就不值得进一步去研究这个部分问题了。通过增加整数约束条件缩减可行域所求得部分问题的整数解，不会比相应的连续变量下的最优解好。在这种情况下，称这个部分问题已被“查清”了，从此可以舍去。一旦求出一个可行整数解，它的相应目标函数值可以用来作为一个界（对于最大化问题是下界，而对于最小化问题是上界）来舍弃那些较差的部分问题。因此，运用定界的概念可以提高计算效率。

第二节 整数规划法

例2.6 求解整数规划

$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{且} x_1, x_2 \text{取整数} \end{cases}$$

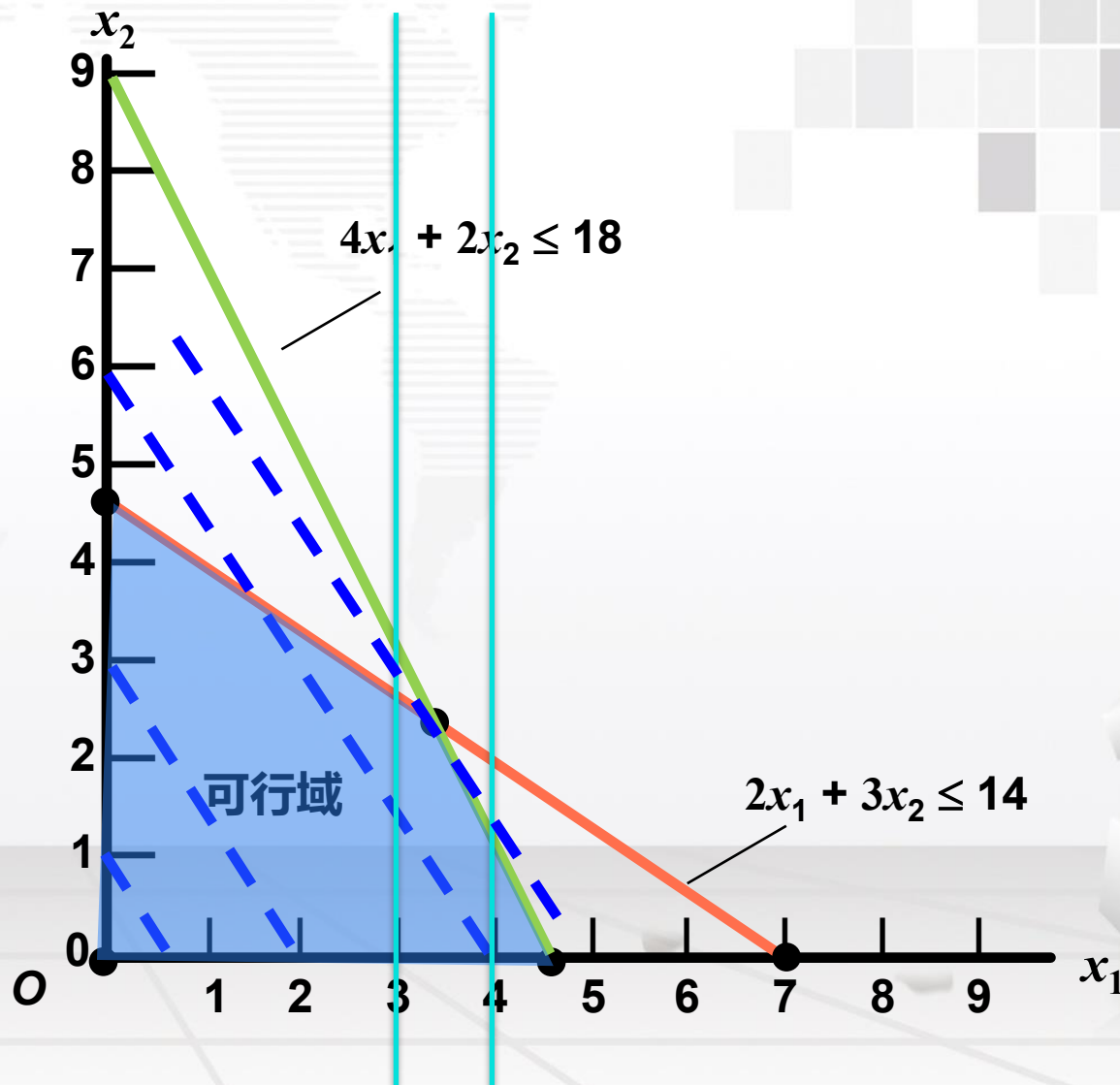


$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2-10-B)$$

其线性规划的解为

$x_1=3.25, x_2=2.5, z=14.75$ (上界)

任选一个变量。



第二节 整数规划法

$$\begin{aligned}x_1 &\leq [3.25] = 3 \\x_1 &\geq [3.25] + 1 = 4\end{aligned}$$

带入2-10-B

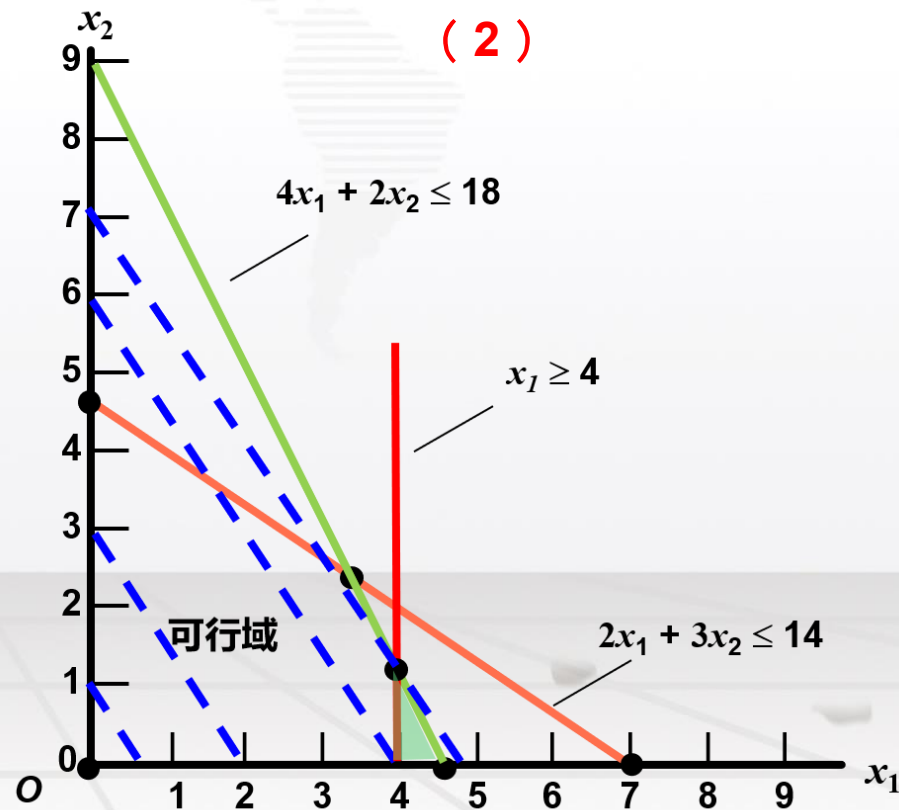
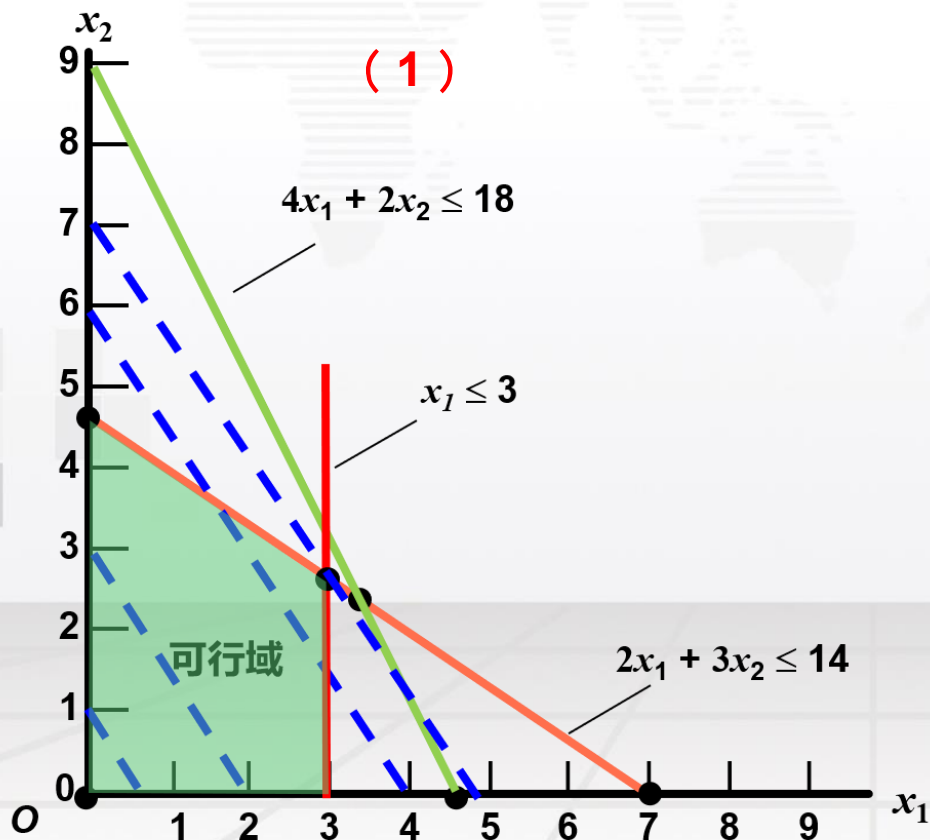


$$(1) \max z = 3x_1 + 2x_2$$

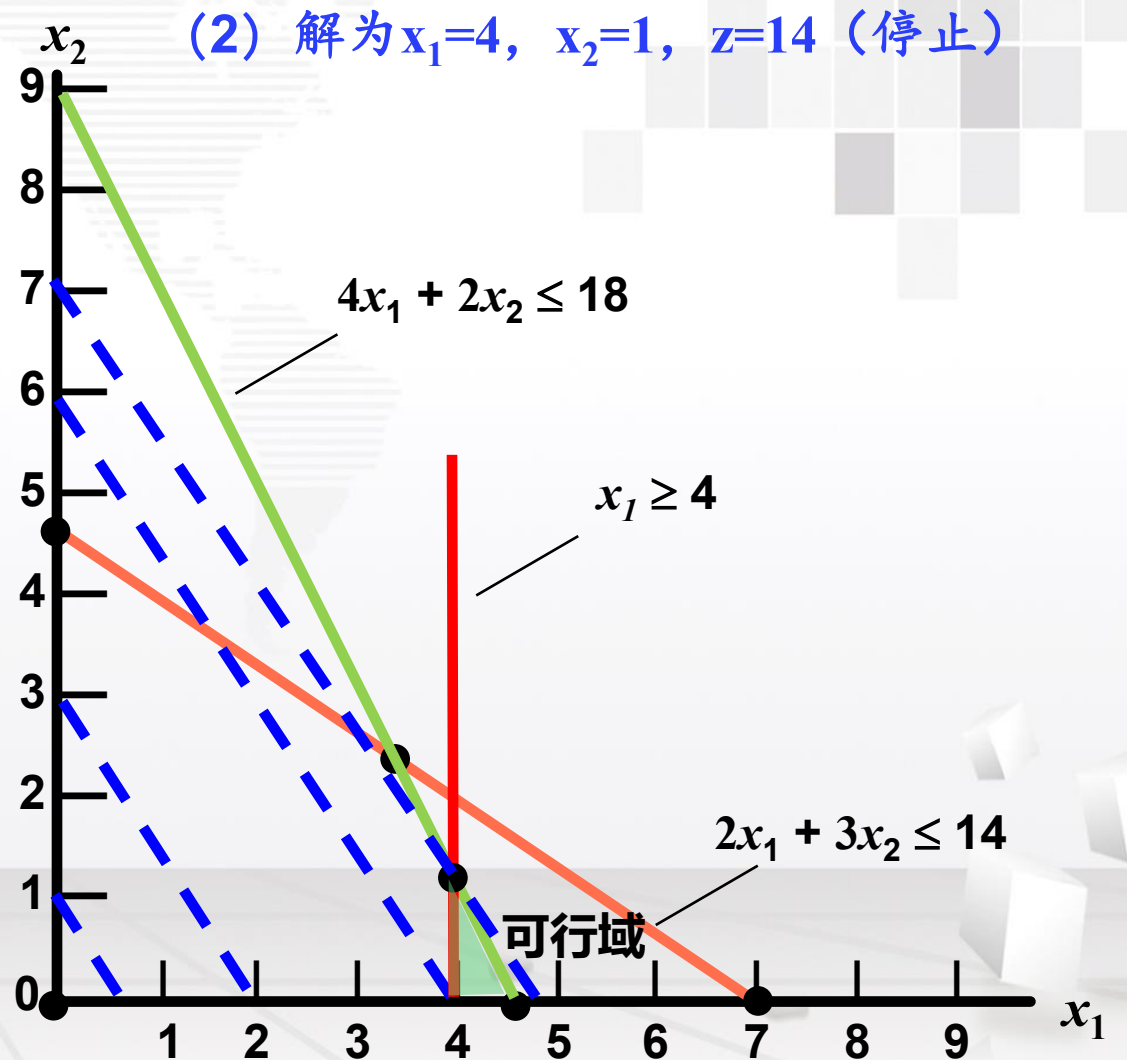
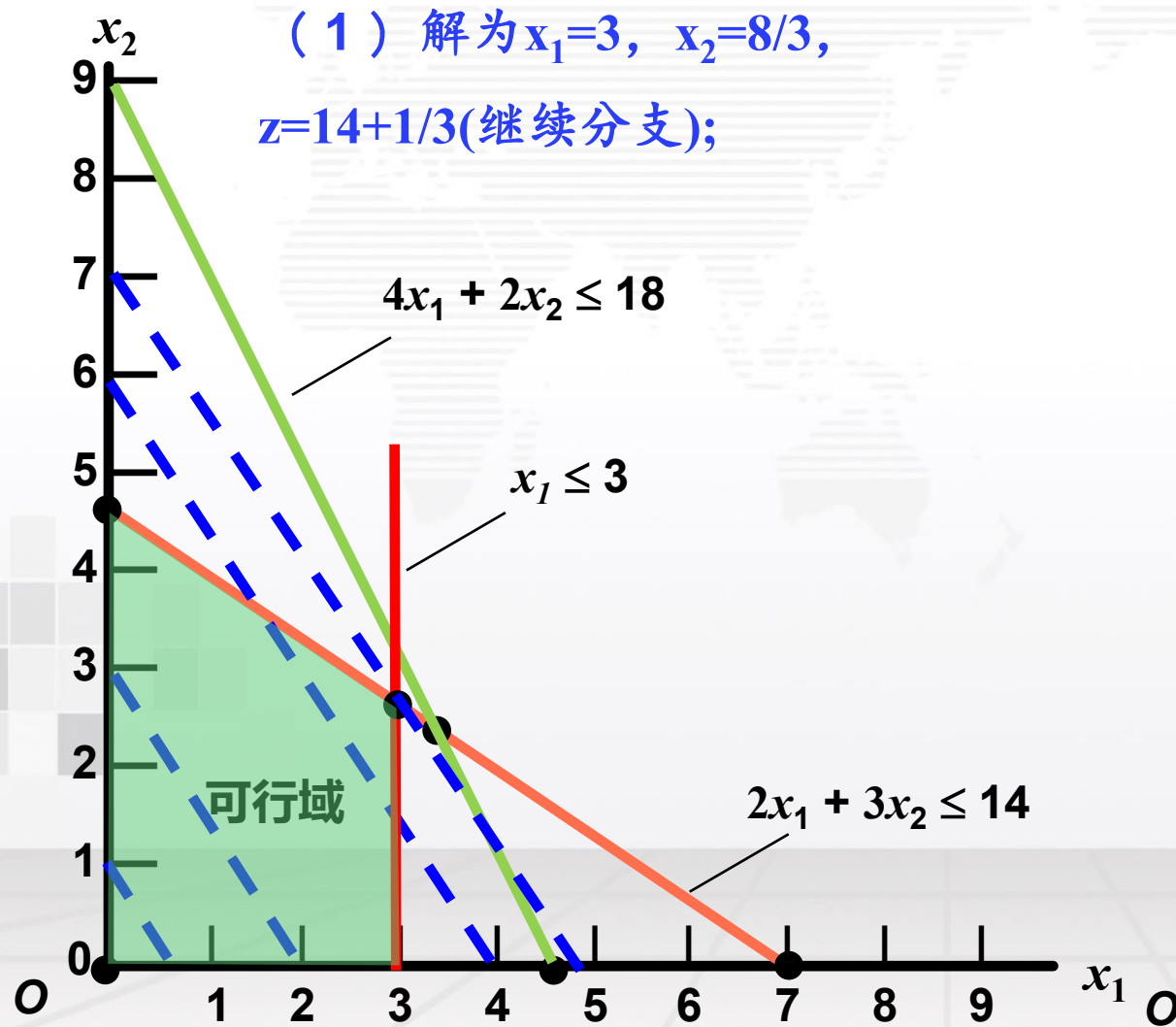
$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



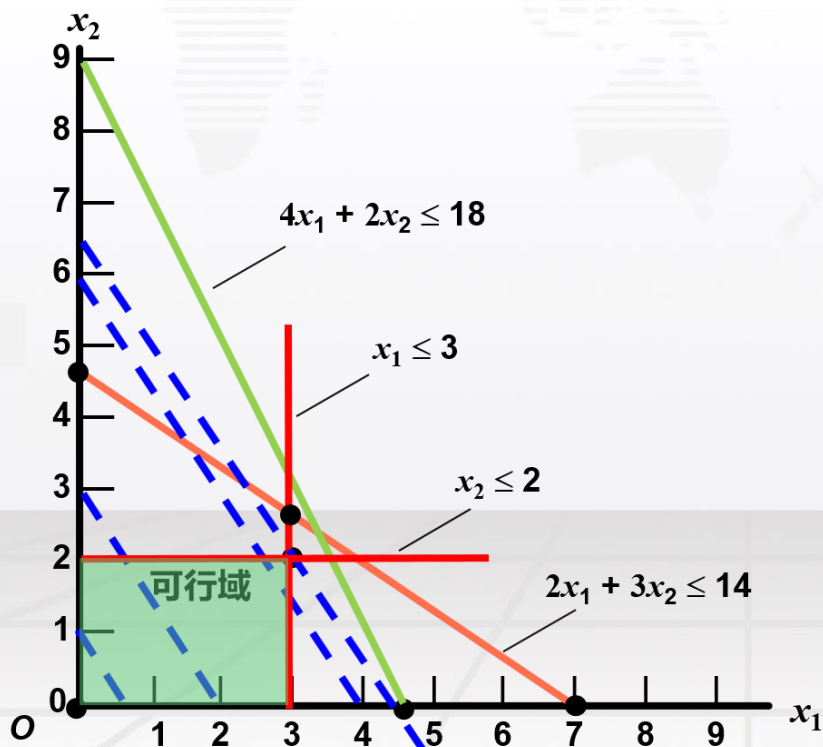
第二节 整数规划法



第二节 整数规划法

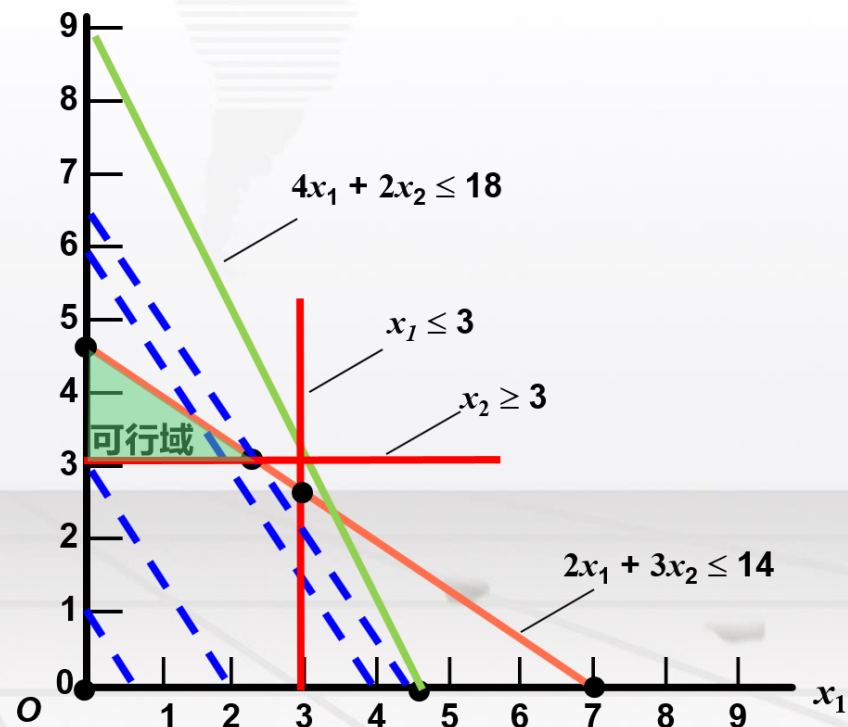
$$\begin{aligned}x_1 &\leq 3 \\x_2 &\leq [2.67] = 2 \\x_2 &\geq [2.67] + 1 = 3\end{aligned}$$

带入(1)



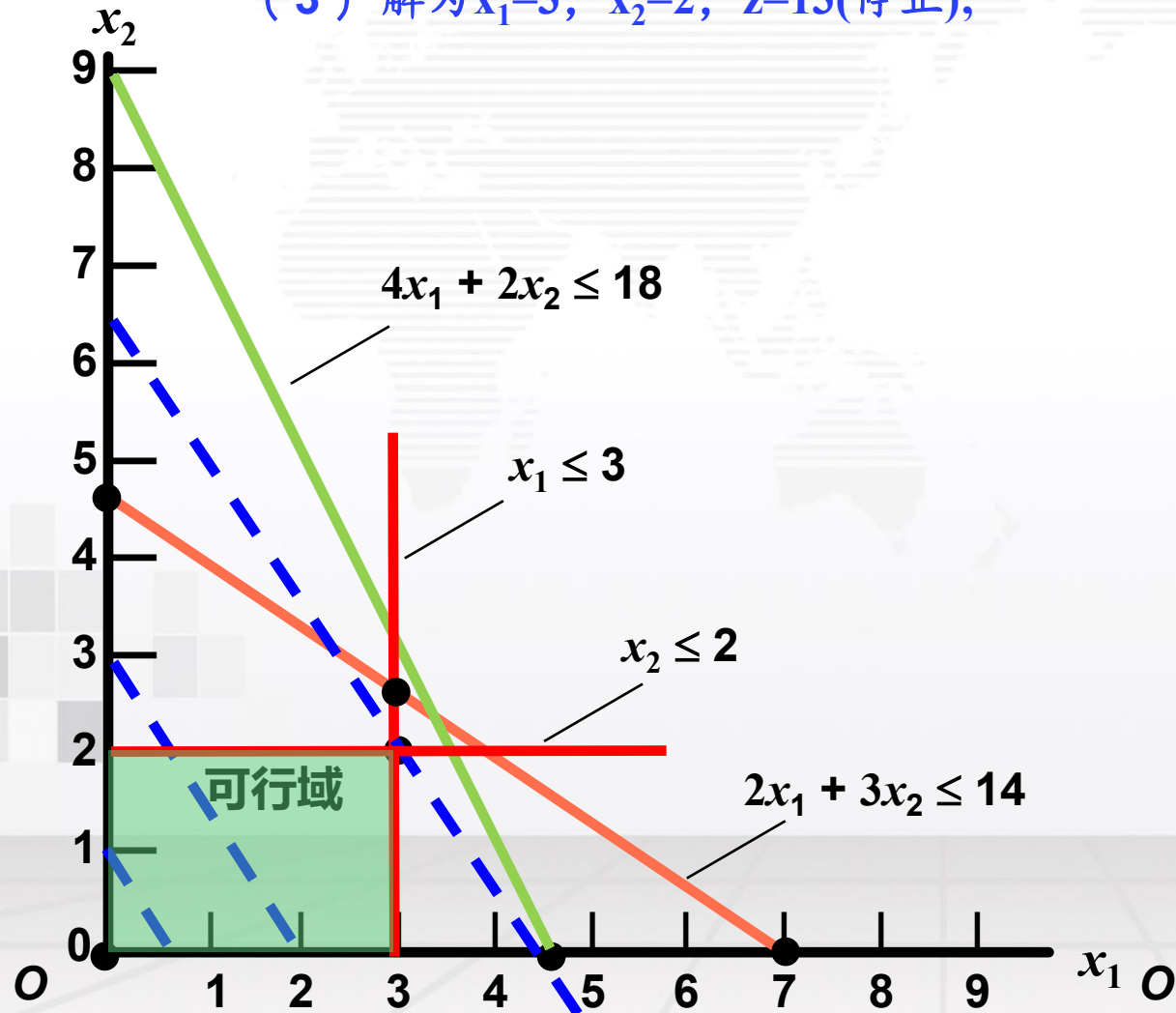
$$(3) \max z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(4) \max z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

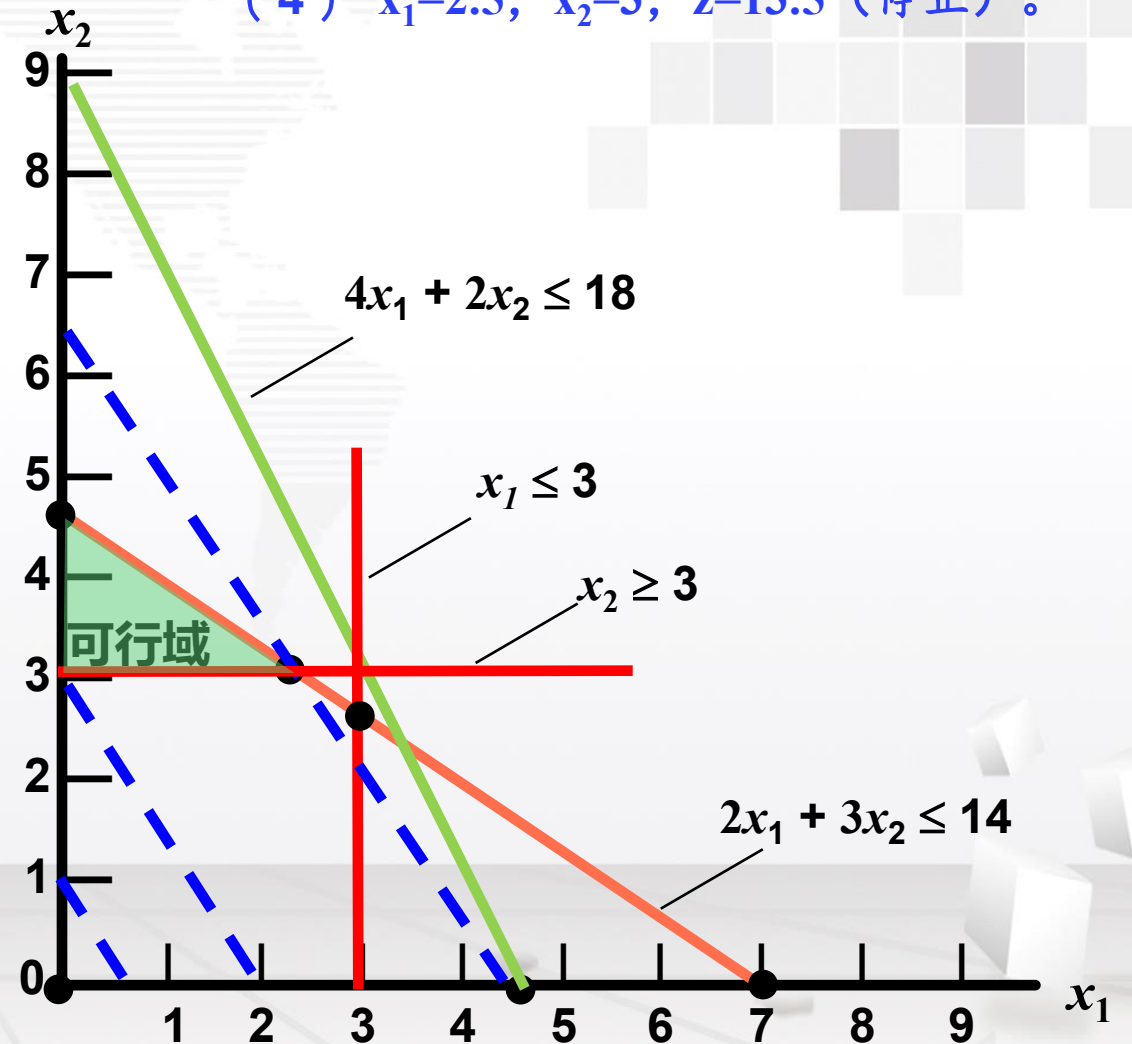


第二节 整数规划法

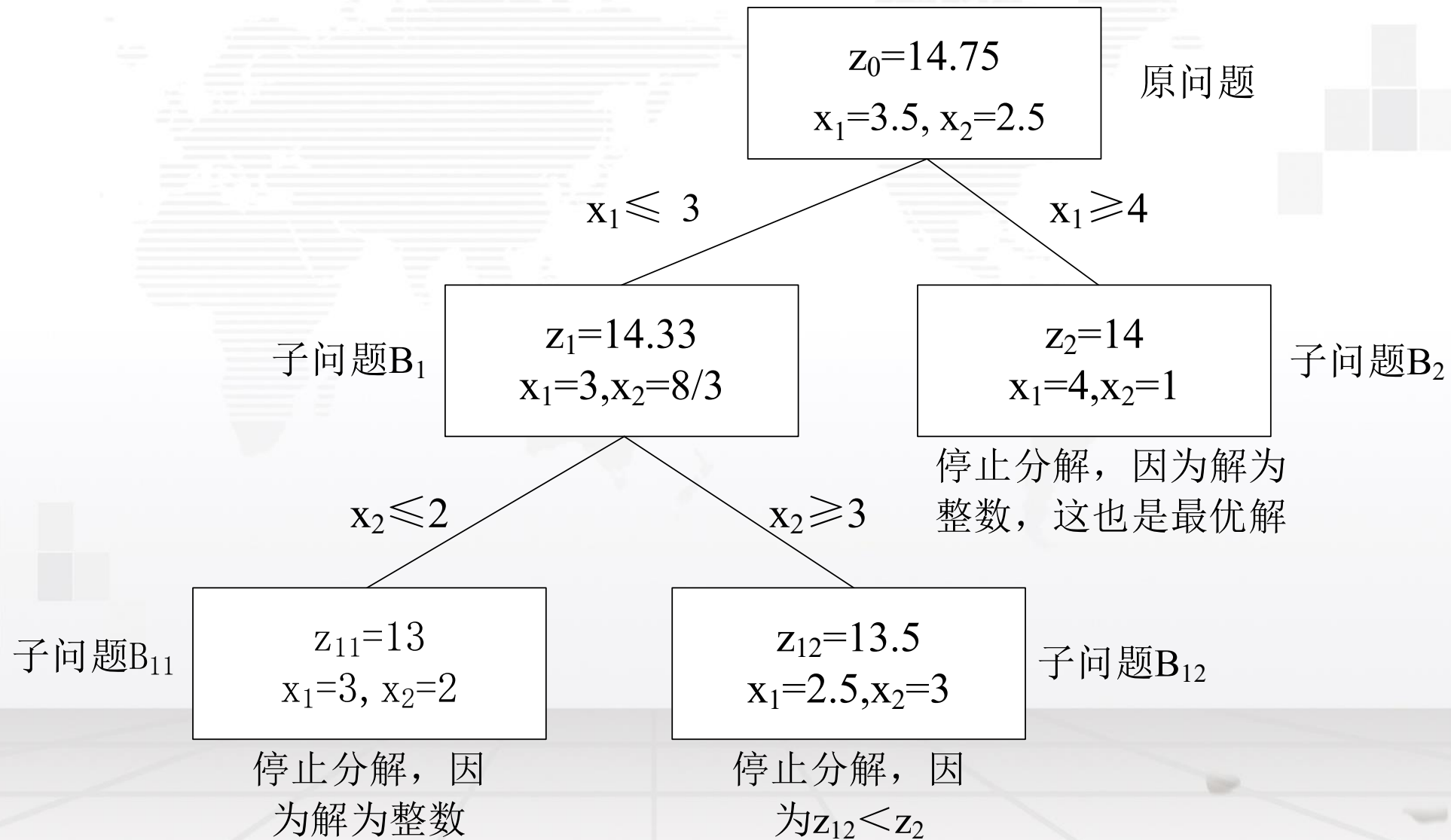
(3) 解为 $x_1=3$, $x_2=2$, $z=13$ (停止);



(4) $x_1=2.5$, $x_2=3$, $z=13.5$ (停止)。



第二节 整数规划法



第二节 整数规划法

■ 分支定界法的方法步骤

- ✓ 把每一个部分问题，以原目标函数按一般线性规划问题求解。
- ✓ 如果部分问题的最优解都满足整数条件，那么就把最好的一个记录下来作为最优解。在这种情况下，就不需要再进一步划分部分问题了，因为通过增加约束条件划分部分问题缩小了可行域，不可能产生更好的整数解。

第二节 整数规划法

■ 分支定界法的方法步骤

- ✓ 如果仍有整数变量的最优值是分数，那么再把整数条件加进去而将部分问题再划分为两个部分问题进行求解。当某一个部分问题得到一个比记录下来的整数解更好的整数可行解时，就用它来代替现有的一个。
- ✓ 按此步骤进行下去，直到每一个部分问题得到一个整数解或者明显看出不能产生一个更好的整数解为止。
- ✓ 最后记录下来的满足整数条件的可行解，就是问题的最优整数解。

第二节 整数规划法

整数规划中全部变量都必须为整数时，称为**纯整数规划**；如果只要求部分变量必须为整数，则称为**混合整数规划**。整数规划的一种特殊情形是它的变量取值仅限于0或1，称为**0-1整数规划**。

□ 整数规划法在采矿中的应用

- ✓ **采掘进度计划的编制**。矿山中，每个矿块是开采或不开采，可分别用0或1两个数表示，从而构成0-1整数规划。
- ✓ **矿山设备和人员的安排**。例如，露天矿中电铲的配车问题，其车数只能是整数，就使用整数规划求解。

第二节 整数规划法

二、0-1规划

- **枚举法（穷举法）**：检查变量取值为0或1的每一种组合，比较函数值的大小求得最优解。当变量个数较多时，就很难进行。
- **隐枚举法**：在枚举法的基础上，通过增加某些条件，以减少计算工作量，求得问题的最优解。
 - ① 先从所有变量等于零出发，依次指定一些变量取值1，直到获得一个可行解。
 - ② 把这第一个可行解的目标函数值作为一个“界”，制定出一个约束条件，称为**过滤性约束条件**。
 - ③ 接下来再依次检查变量取值0或1的各种组合，不断地对迄今为止的可行解加以改进，直到**获得最优解为止**。关键在于检查中对那些不可能得到较好可行解的许多组合就不去检查了。

第二节 整数规划法

例2.7 某矿区制定长远规划，在规划期内，要建新井使年产量不少于100万t。用于建新井的投资仅有16 000万元，现有4个井田，各矿井设计年产量、投资和建成后获利情况见表2-13。现在要选择最优建设方案，在满足上述条件下，使矿区的赢利最大。

表 2-13

矿井序号	设计年产量/万t	建设投资/千万元	建成后获利（预计） /（千万元/a）
1	30	6	3
2	60	7	5
3	90	8	6
4	120	10	8

第二节 整数规划法

解：引入0或1，取1表示选择该矿井进行建设，取0表示舍弃，
即不建该矿井。建立数学模型为：

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 \\ \begin{cases} 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 10x_4 \leq 16 \\ 30x_1 + 60x_2 + 90x_3 + 120x_4 \geq 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases} \end{aligned}$$

第二节 整数规划法

隐枚举法求解过程如表2-14所列。

表 2-14

(x_1 , x_2 , x_3 , x_4)	z值	约束条件		过滤条件
		①	②	
(0, 0, 0, 0)	0	√	√	$z \geq 0$
(0, 0, 0, 1)	8	√	√	$z \geq 8$
(0, 0, 1, 0)	6			
(0, 0, 1, 1)	14	×		
(0, 1, 0, 0)	5			
(0, 1, 0, 1)	13	×		
(0, 1, 1, 0)	11	√	√	$z \geq 11$
(0, 1, 1, 1)	19	×		
(1, 0, 0, 0)	3			
(1, 0, 0, 1)	11	√	√	$z \geq 11$
(1, 0, 1, 0)	9			
(1, 0, 1, 1)	17	×		
(1, 1, 0, 0)	8			
(1, 1, 0, 1)	16	×		
(1, 1, 1, 0)	14	×		
(1, 1, 1, 1)	22	×		

第二节 整数规划法

隐枚举法

可得, $(0, 1, 1, 0)$ 和 $(1, 0, 0, 1)$ 为最优解。

- 第一方案建设2,3号井,能力为 $60+90=150$ (万t),建设投资为15000万元;
- 第二方案建设1, 4号井, 能力为 $30+120=150$ (万t),建设投资为16000万元。
- 两个方案获利情况相同, 决策者可根据矿区开采技术条件、接续以及外部条件等进行比较, 确定采用哪个方案。

第三章 数学规划法

- 1 线性规划法
- 2 整数规划法
- 3 多目标规划法
- 4 非线性规划
- 5 动态规划

第三节 多目标规划

- **线性规划**是应用最为广泛的数学规划方法，但它有两个明显的弱点：（1）目标单一；（2）约束条件不能矛盾。
- **目标规划**是用来进行含有单目标和多目标的决策分析的数学规划方法，是线性规划的一种特殊类型，在线性规划基础上发展起来的。目标规划的基本原理、数学模型结构与线性规划相同，也使用**单纯形法**作为计算的基础。
- 目标规划与线性规划不同在于，以**目标离规定值的偏差为最小**入手解题，并将该目标和表示与目标的偏差的变量规定在表达式的约束条件之中。

第三节 多目标规划

例2.8 本章例2.1，若在原给定条件的基础上增加如下两个条件：①回采第一矿层的成本为15元 / t；②回采第二矿层的成本为10元 / t。

那么如何确定这两个矿层的合理年产量，使得全矿井的产量最大而生产成本最低。

解：设第一矿层的产量为 x_1 万t / a，第二矿层的产量为 x_2 万t / a，根据已知条件可建立如下数学模型：

$$\begin{aligned} \max z_1 &= x_1 + x_2 \\ \min z_2 &= 15x_1 + 10x_2 \\ s.t. \quad &\begin{cases} x_1 \leq 50 \\ x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq x_1 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

第三节 多目标规划



目标规划怎样解决上述线性规划模型建模中的局限性？

设置偏差变量，用来表明实际值同目标值之间的差异。

产生原因：对于企业给定的目标值，可能在实际的决策过程中会出现达不到或者超出的情况，但是具体的数值事先没有办法知道，因此是一个变量，把这种变量记做目标的**偏差变量**。

第三节 多目标规划

偏差变量用下列符号表示：

d^+ ——超出目标的偏差，称正偏差变量。

d^- ——未达到目标的偏差，称负偏差变量。



由于在实际决策中，不可能同时出现正负两个偏差，所以应该有一个变量的值为0，即：

正负偏差变量两者必有一个为0。

- 当实际值超出目标值时： $d^+ > 0, d^- = 0$;
- 当实际值未达到目标值时： $d^+ = 0, d^- > 0$;
- 当实际值同目标值恰好一致时： $d^+ = 0, d^- = 0$;

故恒有 $d^+ \times d^- = 0$ 。

第三节 多目标规划

在例2.8中，已得到一个多目标的数学模型。若取全矿产量的期望值为50万t，开采成本的期望值为700万元。

引入正、负偏差变量 d_i^+ ， d_i^- ($i=1, 2$)。

- d_1^+ 表示产量超过50万t的数值， d_1^- 表示产量不到50万t的数值；
- d_2^+ 表示开采成本高于700万元的数值， d_2^- 表示开采成本低于700万元的数值。

将两个目标约束条件并入原来的约束条件中如下：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 50 \\ 15x_1 + 10x_2 + d_2^- - d_2^+ = 700 \\ x_1 \leq 50 \\ x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq x_1 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 \leq 12 \\ x_i, d_i^+, d_i^- \geq 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

第三节 多目标规划

3、达成函数

即构成一个新的目标函数。在达成函数中，各正、负偏差变量的运用要根据对各目标的不同要求。

一般的做法是：

①要准确地实现某个目标(第 i 个目标)的期望值，则应该使相应的正、负偏差变量 d_i^+ ， d_i^- 同时尽可能地小，故应将 d_i^+ 和 d_i^- 同时列入达成函数中。形式为：

$$\min(d_i^+ + d_i^-)$$

第三节 多目标规划

②若某个目标允许超过期望值，但希望尽可能不要低于期望值，如利润、产值目标等，则应该使相应的负偏差变量 d_i^- 尽可能地小，故只需将 d_i^- 列入达成函数中。形式为： $\min d_i^-$ 。

由于 d_i^+ 的取值为该目标超过期望值的数值，这是问题中允许的或是欢迎的，因此， d_i^+ 不需要列入达成函数中。

③若某个目标允许低于期望值，但不得超过，如资源约束，则应希望相应的正偏差变量 d_i^+ 尽可能地小，故只需将 d_i^+ 列入达成函数中。形式为： $\min d_i^+$ 。

同理，由于 d_i^- 的取值为该目标低于期望值的数值，这是问题所允许的或是欢迎的，因此，此时 d_i^- 不需列入达成函数中。

第三节 多目标规划

在例2-8所得到的模型中，如果我们希望全矿产量不得低于期望值50万t，开采成本不得超过期望值700万元，则其达成函数为：

$$\min f = d_1^- + d_2^+$$

此时的数学模型为：

$$\min f = d_1^- + d_2^+$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 50 \\ 15x_1 + 10x_2 + d_2^- - d_2^+ = 700 \\ x_1 \leq 50 \\ x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq x_1 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 \leq 12 \\ x_i, d_i^+, d_i^- \geq 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

第三节 多目标规划

例2.9 某车间生产甲、乙两种产品，每种产品均需经过相同的两道工序，所需的加工时间、车间的最大生产能力及每种产品的单价如表2-15所列。试确定生产方案，使1天之内的产值最大。

表 2-15

项目	产品甲	产品乙	每天最大生产能力/h
工序I/（h/kg）	2	1	30
工序II/（h/kg）	1	2	24
单价/（h/kg）	200	370	

第三节 多目标规划

解：设 x_1 、 x_2 分别为产品甲、乙的日产量（单位：kg），则得线性规划模型

$$\max Z = 200x_1 + 370x_2$$

约束条件为：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

很容易求出，它的最优解为

$$x_1 = 12, x_2 = 6, \max Z = 4620 \text{元}$$

第三节 多目标规划

若厂部下达指标：每天产值为5000元。把它看成产值这个目标的期望值，引入正、负偏差变量 d_1^+ ， d_1^- ，可得该问题的目标规划模型如下：

$$\min f = d_1^-$$

约束条件为：

$$\begin{cases} 200x_1 + 370x_2 + d_1^- - d_1^+ = 5000 \\ 2x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2, d_1^+, d_1^- \geq 0 \end{cases}$$

可得最优解为： $x_1 = 12$ ， $x_2 = 6$ ， $d_1^- = 380$ 。即每日甲产品生产12kg，乙产品生产6kg，最优产值比期望值少了380元，即达到 $5000 - 380 = 4620$ （元）。

第三节 多目标规划

例2.10 假定该车间不但要有较大的产值，而且希望有较高的利润。设甲产品每千克可得利润30元，乙产品每千克可得利润80元，且假定利润的期望值为每天960元。问如何安排生产，才能使产值、利润两个目标最接近于实现期望值。

解：考虑产值与利润的期望值，且引进产值与利润的正、负偏差变量，可得这个问题的目标规划模型如下：

$$\min f = d_1^- + d_2^-$$

约束条件为：

$$\begin{cases} 200x_1 + 370x_2 + d_1^- - d_1^+ = 5000 \\ 30x_1 + 80x_2 + d_2^- - d_2^+ = 960 \\ 2x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2, d_i^+, d_i^- \geq 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

第三节 多目标规划

4、目标的权系数和优先级别

在例2.10中， $\min f = d_1^- + d_2^-$ ，这表示两个偏差变量有同等的意义。

即 d_1^- —每减少1元，与 d_2^- —减少1元具有相同的目标价值，所求的是 d_1^- 与 d_2^- 之和的最小值。

实际上，也可以赋予它们不同的含义。

例如，认为利润 d_2^- —每减少1元，相当于产值 d_1^- —减少2元，此时，就必须给达成函数 f 中的这两个偏差变量以适当的权系数，以反映这一点。即在 f 中将 d_2^- —乘上系数2，此时的达成函数就变为： $\min f = d_1^- + 2d_2^-$

第三节 多目标规划

目标优先等级

有时，决策者会认为不同的目标之间是不能互相抵消的。各个目标都必须有一定程度的保证，并且某些目标是另一些目标的前提，即决策者想在达到某些最重要目标的前提下，再来解决次要的目标。

于是，要求把目标按其重要程度排列起来：先解决第一个（或第一批）目标，以它作为前提，然后再解决第二个（或第二批）目标。

用优先等级因子 p_i ($i=1, 2, \dots, k$) 表示第 i 级别的目标，它是一种特殊的权系数。

$$p_1 \gg p_2 \gg p_3 \gg \dots \gg p_i$$

第三节 多目标规划

- 如果假定利润为第1优先等级的目标，产值为第2优先等级的目标，则它的达成函数就变为：

$$\min f = p_1 d_2^- + p_2 d_1^-$$

- 在实际中，往往还可以把若干个重要程度相仿的目标列入同一优先等级。列入同一优先等级的各目标要有统一的度量单位，再在它们之间选取适当的权系数。得到的达成函数既有优先等级，又在同一优先等级内有相应的权系数。

$$\min f = p_1(2d_1^- + d_3^+) + p_2 d_2^- + p_3(d_4^- + 3d_1^+)$$

第三节 多目标规划

三、目标规划模型的一般形式

$$\min Z = \sum_{l=1}^L P_l \left(\sum_{k=1}^K \omega_{lk}^- d_k^- + \omega_{lk}^+ d_k^+ \right)$$

达成函数

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j + d_k^- - d_k^+ = g_k \quad (k = 1.2 \cdots K) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i \quad (i = 1.2 \cdots m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1.2 \cdots n) \\ d_k^+ \cdot d_k^- \geq 0 \quad (k = 1.2 \cdots K) \end{cases}$$

目标约束

其中： g_k 为第 k 个目标约束的预期目标值， ω_{lk}^- 和 ω_{lk}^+ 为 p_l 优先因子对应各目标的权系数。

第三节 多目标规划

■ 建立目标规划模型的基本步骤如下：

- ✓ 按生产和工作要求确定各个目标及其优先等级和期望值；
- ✓ 设立决策变量，建立各个约束条件方程；
- ✓ 对每个目标引进正、负偏差变量，建立目标约束条件，并入已有的约束条件中；
- ✓ 如果各约束条件之间有矛盾，也可适当引入偏差变量；
- ✓ 根据各目标的优先等级和权系数建立达成函数。

第三节 多目标规划

五、目标规划的图解法

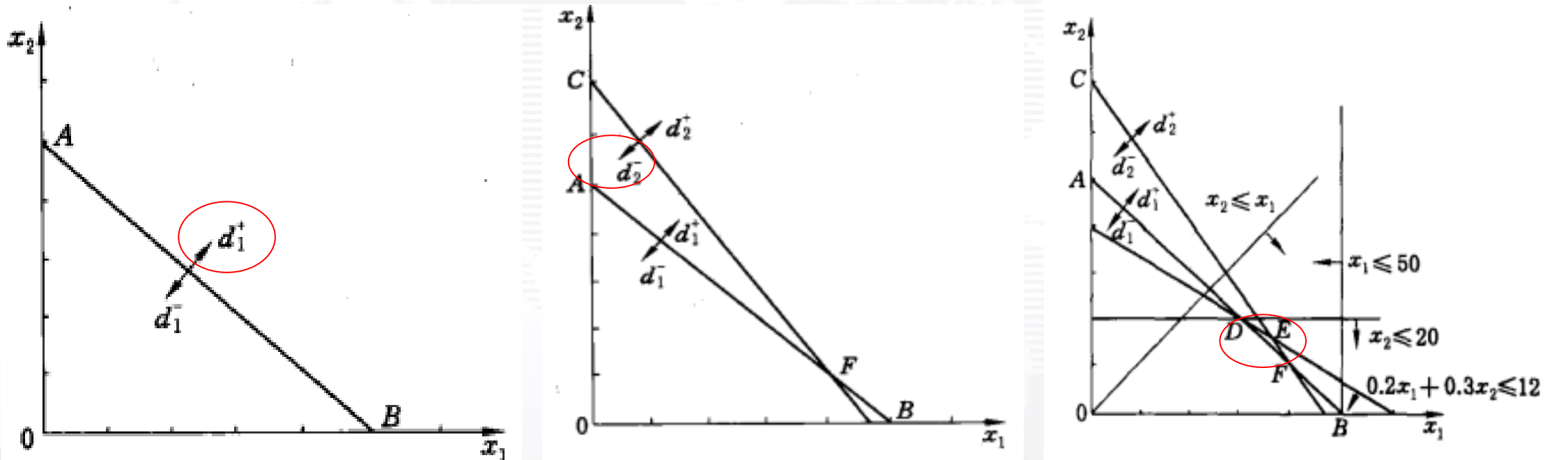
例2.11试用图解法解例2.8所建立的目标规划数学模型。要求产量为第一重要目标。

$$\min z = p_1 d_1^- + p_2 d_2^+$$

约束条件:

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 50 \\ 15x_1 + 10x_2 + d_2^- - d_2^+ = 700 \\ x_1 \leq 50 \\ x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq x_1 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 \leq 12 \\ x_i, d_i^+, d_i^- \geq 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

第三节 多目标规划



可行域为DEF区域。三角形DEF的边和其中任何一点都满足要求。

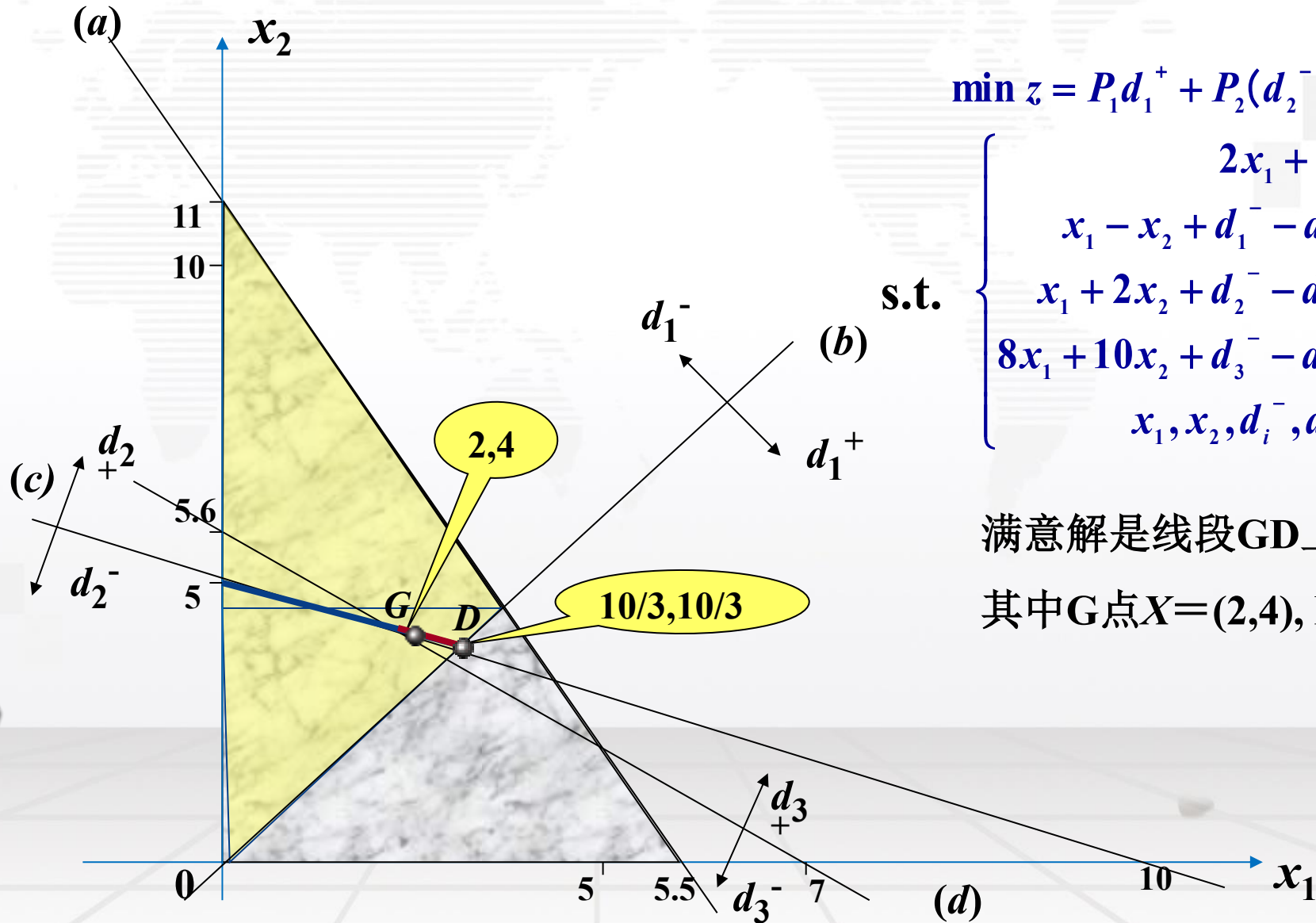
容易求得D, E, F三点的坐标分别为(30, 20), (36, 16), (40, 10), 故问题的解可表示为:

$$a_1(30, 20) + a_2(36, 16) + a_3(40, 10) = (30a_1 + 36a_2 + 40a_3, 20a_1 + 16a_2 + 10a_3)$$

式中, $a_1, a_2, a_3 \geq 0, a_1 + a_2 + a_3 = 1$

第三节 多目标规划

例题:



$$\begin{aligned} \min z &= P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^- \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 & (1) \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 (i=1,2,3) \end{cases} \end{aligned}$$

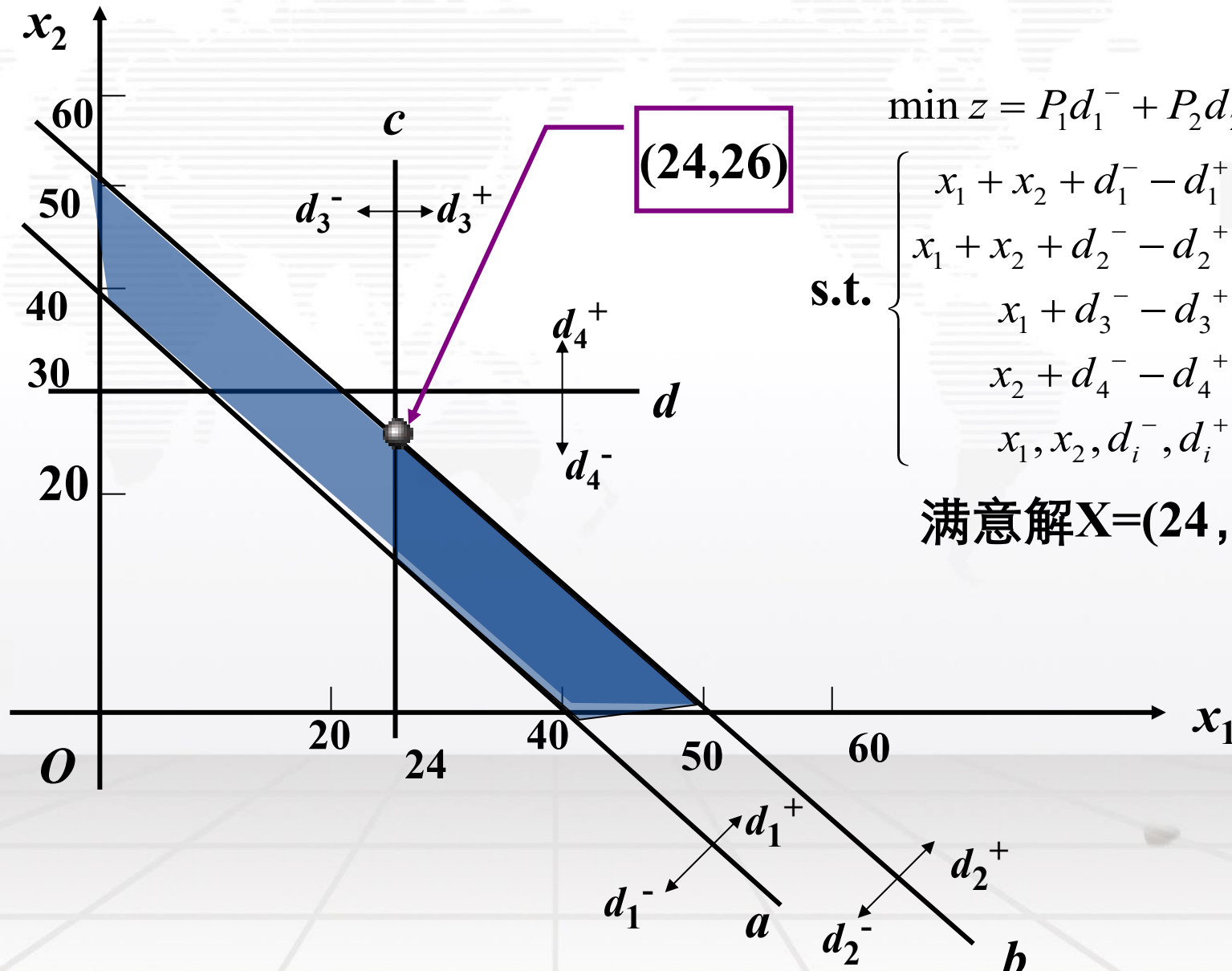
满意解是线段GD上任意点。

其中G点 $X=(2,4)$, D点 $X=(10/3,10/3)$ 。



第三节 多目标规划

例题:



$$\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 (2d_3^- + d_4^-)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 & (1) \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 & (2) \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 24 & (3) \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 & (i = 1, \dots, 4) \end{cases}$$

满意解 $X = (24, 26)$

第三章 数学规划法

- 1 线性规划法
- 2 整数规划法
- 3 多目标规划法
- 4 非线性规划
- 5 动态规划

第四节 非线性规划

- 很多工程实际问题可归结为线性规划问题，其目标函数与约束条件均是自变量的一次函数。但在优化设计、质量控制等领域，广泛应用着另一种规划方法——**非线性规划**。**非线性规划**是指目标函数或约束条件中存有非线性关系的数学规划。
- 非线性规划在矿业中的应用较广泛，特别是应用于矿井最优设计
 - (1) 工作面长度确定
 - (2) 采区参数选择
 - (3) 采区巷道布置方案
 - (4) 水平高度确定
 - (5) 开拓方式选择
 - (6) 矿井与采区生产能力确定等

第四节 非线性规划

例：设某准轨自翻车呈现长方形，其容积是 44m^3 。假定原底板的费用是 150 元/ m^2 ；四周侧板的费用是 100 元/ m^2 。问车箱尺寸如何才使它的造价最低。为了解算这个问题，设车箱的长、宽、高各为 x_1 、 x_2 、 x_3 m。根据车箱造价最低这个目标，有：

$$\text{Min } z = 100(2x_1x_3 + 2x_2x_3) + 150x_1x_2$$

根据容积要求，有

$$\text{s.t. } \begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 44 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

目标函数或约束条件中存有非线性关系。

第四节 非线性规划

例：某公司经营两种设备,第一种设备每件售价 30 元,第二种设备每件售价 450 元,根据统计,售出一件第一种设备所需要的营业时间平均是 0.5 小时,第二种设备是 $(2+0.25x_2)$ 小时,其中 x_2 是第二种设备的售出数量。已知该公司在这段时间内的总营业时间为 800 小时,试决定使其营业额最大的营业计划。

设该公司计划经营第一种设备 x_1 件,第二种设备 x_2 件,则公司其营业额为

$$f(X) = 30x_1 + 450x_2$$

由于营业时间的限制,该计划必须满足

$$0.5x_1 + (2 + 0.25x_2)x_2 \leq 800$$

此外,这个问题还应满足

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

第四节 非线性规划

于是，可以得到这个问题的数学模型

$$\begin{aligned} \max f(X) &= 30x_1 + 450x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 0.5x_1 + (2 + 0.25x_2)x_2 \leq 800 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

约束条件中存有非线性不等式。

第四节 非线性规划

一般地，非线性规划的标准形式是：

$$\begin{aligned} & \text{Min } z = f(x) \\ & \text{s.t. } \begin{cases} g_i(x) \geq 0, i = 1 \cdots m \\ h_j(x) \geq 0, j = 1 \cdots l \\ x \in R \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 、 $g_i(x)$ 、 $h_j(x)$ 中只要有一个函数是非线性关系，就构成非线性规划，这是非线性规划和线性规划的差别所在。

第四节 非线性规划

■ 非线性规划的常见求解方法

□ 微分求极值法

□ 一维搜索（抛物线逼近法、0.618法、牛顿法）

□ 梯度法

□ 制约函数法（包括惩罚函数法、障碍函数法）

第四节 非线性规划

□ 微分求极值法

采用微分方法求极值的原理确定矿井设计参数，称为微分求极值法。

此法适用于设计项目为定量参数，初始数据为确定型，变量数目较少的情况。

(1) 得到目标函数与参变量之间的函数关系式

(2) 求最高(如产量、赢利、效率)或最低(如成本、耗材)的极值

这个极值即是在经济上(或其他指标)最优的参数值。

第四节 非线性规划

例题 某矿掘进一条运输大巷，该巷道通过风量为 $39.6 \text{ m}^3 / \text{s}$ ，断面形状为半圆拱形，采用锚喷支护形式，围岩为砂岩，坚固性系数 $f=6\sim 10$ ，服务年限为 20 a ，能够满足大巷运输、行人等要求的断面面积为 $8\sim 12 \text{ m}^2$ ，试确定其最优经济断面面积。

解：巷道掘进费为： $f_1 = CdSL$

式中 f_1 ——总的掘进费用，元；

C_d ——单位体积掘进费用，元/ m^3 ，参照手册取值；

S ——掘进断面面积， m^2 ；

L ——巷道长度， m 。

第四节 非线性规划

巷道通风费用为：

$$f_2 = \frac{\alpha PLQ^2}{102\eta S^3} \times 365 \times 24 \times K_{\text{电}}$$

式中 f_2 ——通风动力费，元/a；

α ——巷道摩擦阻力系数， $(\text{N} \cdot \text{m}^2)/\text{s}^4$ ；

P ——巷道周长， $P = C\sqrt{S}$ ；

C ——断面形状系数；

Q ——巷道通过的风量， m^3/s ；

$K_{\text{电}}$ ——单位电价，元/(kW·h)；

η ——通风机总效率。

第四节 非线性规划

把上述两项费用相加并整理，得巷道总费用为：

$$\min f = f_1 + f_2 = C_d SL + \frac{8760\alpha K_{\text{电}} CLQ^2}{102\eta} S^{-\frac{5}{2}}$$

对断面S进行求导，并令 $\frac{df}{dS} = 0$ ，可得：
$$S = \sqrt[3.5]{\frac{21900\alpha K_{\text{电}} C Q^2}{102C_d \eta}}$$

据《井巷工程费用概算手册》，当所取费用断面对应为10 m²时， $C_{10} = 14400$ 元 / （10m）；也可取对应断面为8 m²，此时取 $S_a = 8$ m²， C_{10} 作相应改变。根据类似巷道实测数据，取摩擦阻力系数 α 为0.008（N·m²） / s⁴，巷道断面形状系数 $C=4.0$ ，单位电价 $K_{\text{电}}$ 为0.8元，通风机总效率 η 为0.7。

将已知数据代入上式得最优经济断面S为10.2 m²。

第四节 非线性规划

□ 一维搜索

非线性规划问题一般不能用解析法求其目标函数的精确解，必须用数字计算法来逐步求得其近似解。迭代方法的基本思想是：给出一个初始近似值，按照某种规划（即算法）找出比 $x^{(0)}$ 更好的解 $x^{(1)}$ ，再按找出比 $x^{(1)}$ 更好的解 $x^{(2)}$如此即可求得一个解的序列 $\{x^{(k)}\}$ ，直到满足精度为止。搜索法是一系列的迭代过程。

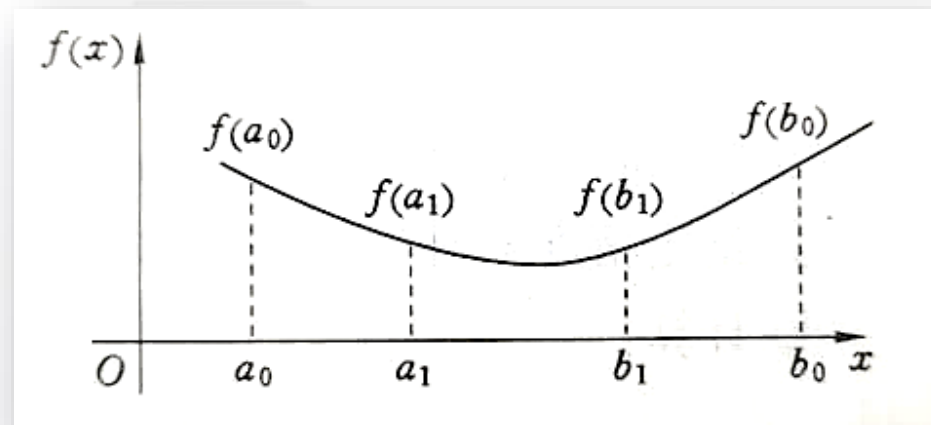
- 抛物线逼近法
- 0.618法（黄金分割法）
- 牛顿法

第四节 非线性规划

● 0.618法 (黄金分割法)

在求 $\text{Min } f(x)$ (单峰函数) 时, 假设包括最优解在内的区间为 $[a_0, b_0]$ ($a_0 < b_0$), a_0, b_0 的值可根据实验或实际经验确定。在 $[a_0, b_0]$ 内, 任取两点 a_1, b_1 ($a_1 \neq b_1$, 且 $a_1 < b_1$) 如图2-15所示, 计算比较 $f(a_1), f(b_1)$ 的大小, 存在三种情况:

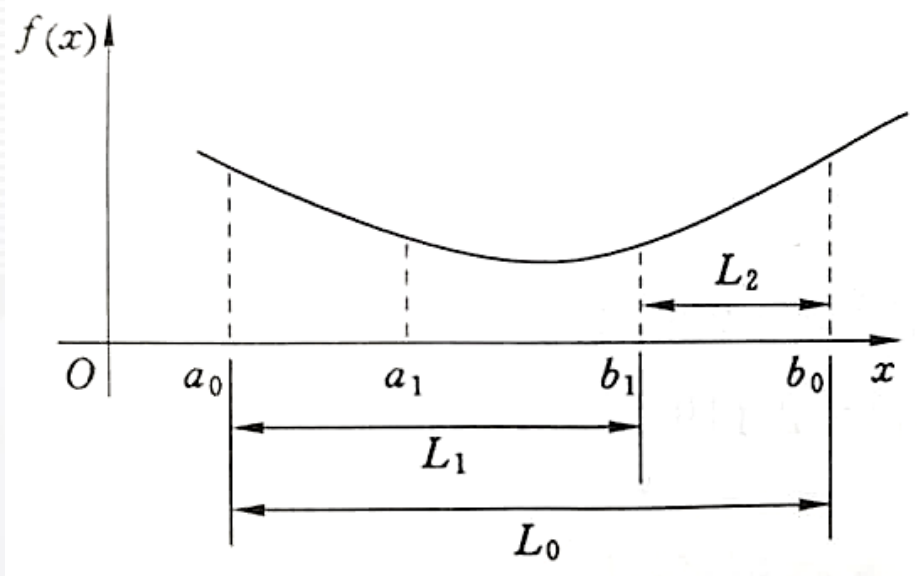
- ① $f(a_1) < f(b_1)$, 最优解在区间 $[a_0, b_1]$ 内;
- ② $f(a_1) > f(b_1)$, 最优解在区间 $[a_1, b_0]$ 内;
- ③ $f(a_1) = f(b_1)$, 最优解在区间 $[a_1, b_1]$ 内。



利用上述方法多次计算, 包括最优解区间不断缩小, 直到满足精度要求, 得到最优解。怎样选择 a_1, b_1 点, 才能使计算量最小呢?

第四节 非线性规划

经证明，每次按比例的选择 a_1 ， b_1 点，即每次缩小后的区间长度和原区间长度的比值，等于去掉的区间长度与保留下的区间长度的比值，此时计算量最小。



$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L_2}{L_1} = \alpha$$

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

求解得到 $\alpha = 0.618$

$$a_1 = a_0 + (1 - 0.618)(b_0 - a_0)$$

$$b_1 = a_0 + 0.618(b_0 - a_0)$$

第四节 非线性规划

0.618 法的计算步骤为:

① 设 $k=1$ (计算次数), 精度 $\varepsilon \geq 0$, 选定 $[a_0, b_0]$, 计算 a_k, b_k 。

$$a_k = a_0 + 0.382(b_0 - a_0)$$

$$b_k = a_0 + 0.618(b_0 - a_0)$$

② 计算 $f(a_k), f(b_k)$ 。

如果 $|b_k - a_k| < \varepsilon$, 得到最优解, $\frac{a_k + b_k}{2}$ 为最优解; 否则, 令 $k=k+1$ 。

③ 当 $f(a_{k-1}) < f(b_{k-1})$ 时, $a_0 = a_0, b_0 = b_{k-1}, b_k = a_{k-1}$,

$a_k = a_0 + 0.382(b_0 - a_0)$, 计算 $f(a_k)$ 转至②; 当 $f(a_{k-1}) \geq f(b_{k-1})$ 时, $a_0 = a_{k-1}$,

$b_0 = b_0, a_k = b_{k-1}, b_k = a_0 + 0.382(b_0 - a_0)$, 计算 $f(b_k)$ 转至②。

第四节 非线性规划

例2.17 经实际分析，吨煤费用可由三部分组成，即随工作面长度增加而增加的费用，随工作面长度增加而减少的费用，不随工作面长度变化而改变的费用。

因此，工作面长度与吨煤成本之间的数学模型可表示为：

$$\min f(L) = aL + b/L + c \quad (a, b, c \text{ 为常数})$$

根据实际统计分析得： $a=0.0231$ ， $b=487$ ， $c=7.66$

$$\min f(L) = 7.66 + 0.0231L + 487/L$$

试用0.618法求吨煤成本最低时的工作面长度。

第四节 非线性规划

解 按实际工作面长度经验，工作面长度应为 $120 \sim 200\text{m}$ 。取精度 $\varepsilon = 5\text{m}$ 。

① 令 $k=1$ ， $a_0 = 120$ ， $b_0 = 200$ 。

$$a_1 = a_0 + 0.382(b_0 - a_0) = 120 + 0.382(200 - 120) = 150.56$$

$$b_1 = a_0 + 0.618(b_0 - a_0) = 120 + 0.618(200 - 120) = 169.44$$

$$f(a_1) = 14.37, \quad f(b_1) = 14.44$$

② $|b_1 - a_1| = |169.44 - 150.56| = 18.88 > \varepsilon = 5$ ，令 $k=2$ 。

第四节 非线性规划

③ 因为 $f(a_1) < f(b_1)$ ，去掉区间 $[169.44, 200]$ ，最优解在区间 $[120, 169.44]$ 内。

$$a_0 = 120, \quad b_0 = 169.44, \quad b_2 = a_1 = 150.56$$

$$a_2 = a_0 + 0.382(b_0 - a_0) = 120 + 0.382(169.44 - 120) = 138.89$$

$$f(a_2) = 14.38, \quad f(b_2) = 14.37$$

④ $|b_2 - a_2| = |150.56 - 138.89| = 11.67 > \varepsilon = 5$ ，令 $k=3$ 。

第四节 非线性规划

⑤ 因为 $f(a_2) > f(b_2)$, 去掉区间 $[120, 138.89]$, 最优解在区间 $[138.89, 169.44]$ 内。

$$a_0 = a_2 = 138.89, \quad b_0 = 169.44, \quad a_3 = b_2 = 150.56$$

$$b_3 = a_0 + 0.618(b_0 - a_0) = 138.89 + 0.618(169.44 - 138.89) = 157.77$$

$$f(a_3) = 14.37, \quad f(b_3) = 14.39$$

⑥ $|b_3 - a_3| = |157.77 - 150.56| = 7.21 > \varepsilon = 5$, 令 $k=4$ 。

第四节 非线性规划

⑦ 因为 $f(a_3) > f(b_3)$ ，去掉区间 $[157.77, 169.44]$ ，最优解在区间 $[138.89, 157.77]$ 内。

$$a_0 = 138.89, \quad b_0 = b_3 = 157.77, \quad b_4 = a_3 = 150.56$$

$$a_4 = a_0 + 0.382(b_0 - a_0) = 138.89 + 0.382(157.77 - 138.89) = 146.1$$

$$f(a_4) = 14.36, \quad f(b_4) = 14.37$$

$$\textcircled{8} \quad |b_4 - a_4| = |150.56 - 146.1| = 4.46 < \varepsilon = 5。$$

最优解（即吨煤成本最低时的工作面长度）为 $(a_4 + b_4)/2 = 148.33m$ ，根据实际情况可取150m。
此模型比较简单，可以用微分极值法求解。

第四节 非线性规划

□ 非线性规划法在采矿中的应用

采矿工程中的许多关系是非线性关系而不是线性的，因此非线性规划有着广泛的使用前景。目前，使用非线性规划的领域有：

- **矿山总体规划。**在大型联合企业里，采矿-选矿-冶炼三者的关系是一个非线性关系，为了合理安排采-选-冶各部门的生产能力，需要用非线性规划来求解。
- **露天矿大型设备的选择。**露天采剥设备的生产效率与其自身尺寸的关系，是非线性的，可用非线性规划来解决设备选择问题。
- **通风井直径的确定。**通风井直径与通风效果的关系，也是非线性的，可用非线性规划处理。

第三章 数学规划法

- 1 线性规划法**
- 2 整数规划法**
- 3 多目标规划法**
- 4 非线性规划**
- 5 动态规划**

第五节 动态规划

- 动态规划大约产生于20世纪50年代，由美国数学贝尔曼等人创立，是解决多阶段决策过程的最优化问题的一种方法。
- 动态规划的中心思想是所谓的**最优性**原理，该原理归结为一个基本的递推关系式，从整个过程的最后阶段出发，逆推计算到第一阶段，找到最优解。

第五节 动态规划

一、多阶段决策问题

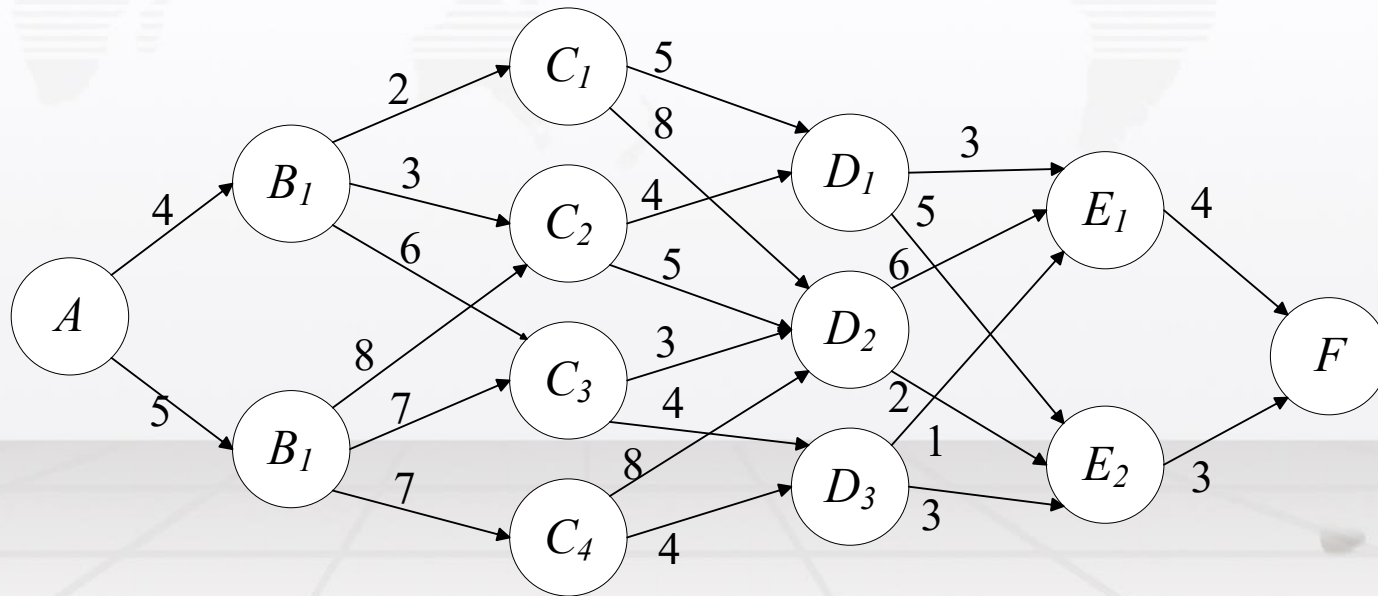
- **多阶段决策过程**：将系统运行过程划分为若干个相互联系的阶段，而在每一阶段都要做出决策。但是每个阶段最优决策的选择不只是孤立地考虑本阶段所取得的效果如何，必须把整个过程中的各阶段联系起来考虑，使得整个过程达到最优。
- **多阶段决策是一个动态过程**：各个阶段采取的决策一般来说是与时间有联系的，决策依赖于当前的状态，又随即引起状态的转移，前一阶段的决策确定以后，常常影响以后各阶段的决策。

第五节 动态规划

例2.22 如图2-17所示。某矿的压气机房位于A处，F是采矿工作面。

从A到F要经过若干段巷道，用节点 $B_1, B_2, \dots, E_1, E_2$ 表示巷道的交叉口，用线段表示所经过的巷道，线段上所标注的数字是相应节点之间的距离。

现在要从A点出发，铺设一条压气管道至F，问应怎样选择线路，才能使所用的管道最省。

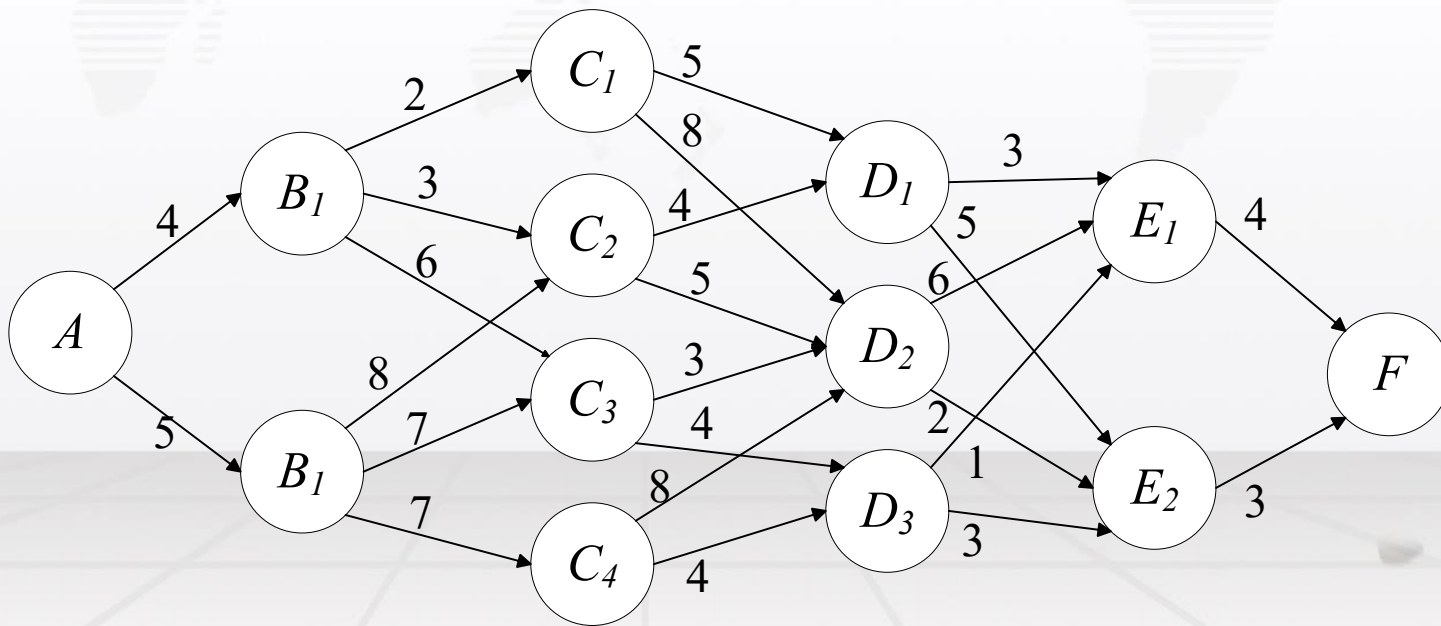


第五节 动态规划

二、动态规划的基本概念

(1) 阶段变量

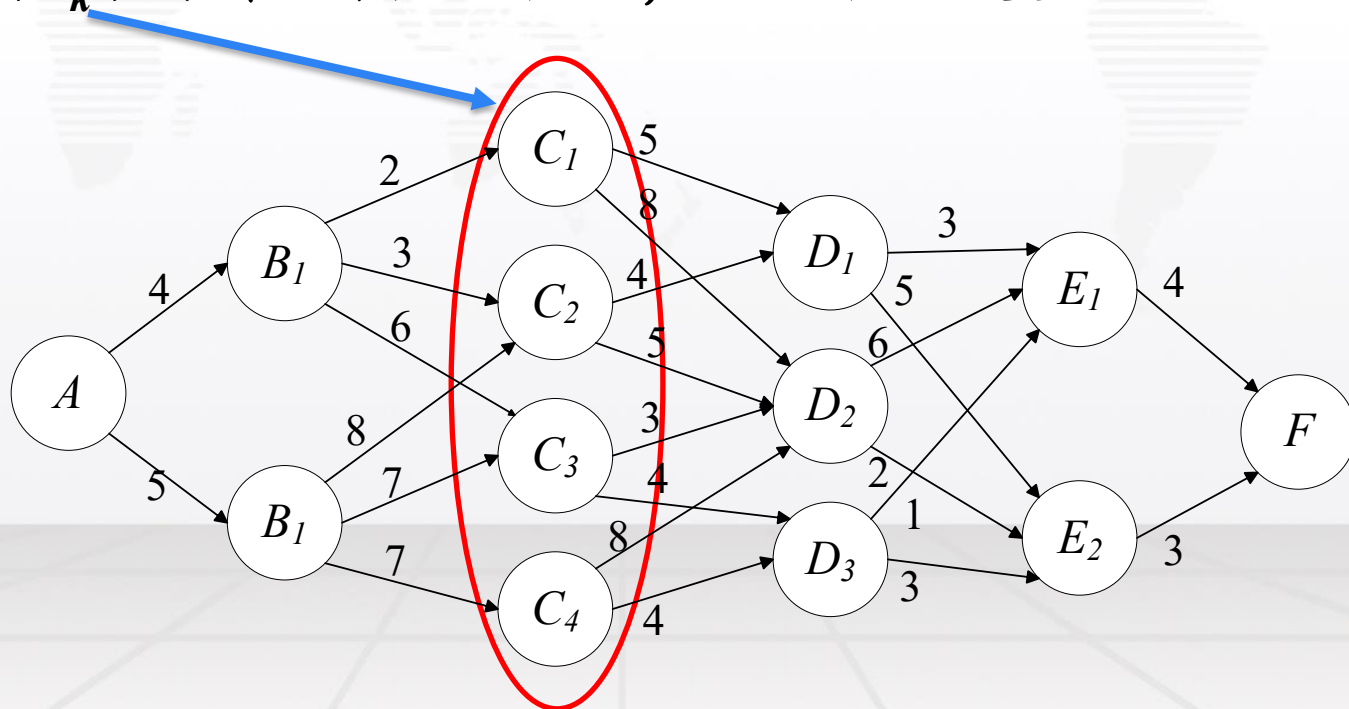
在多阶段决策问题中，一般根据时间或空间的自然特性来划分阶段。描述阶段的变量称为阶段变量，用 k 表示， $k=1,2,\dots,n$ 。



第五节 动态规划

(2) 状态变量

状态表示每个阶段开始所处的状态。状态就是某阶段的出发位置，一个阶段可以包含若干个状态。状态既是该阶段某支路的起点，又是前一阶段某支路的终点。用 S_k 表示第 k 阶段的状态，称为状态变量。

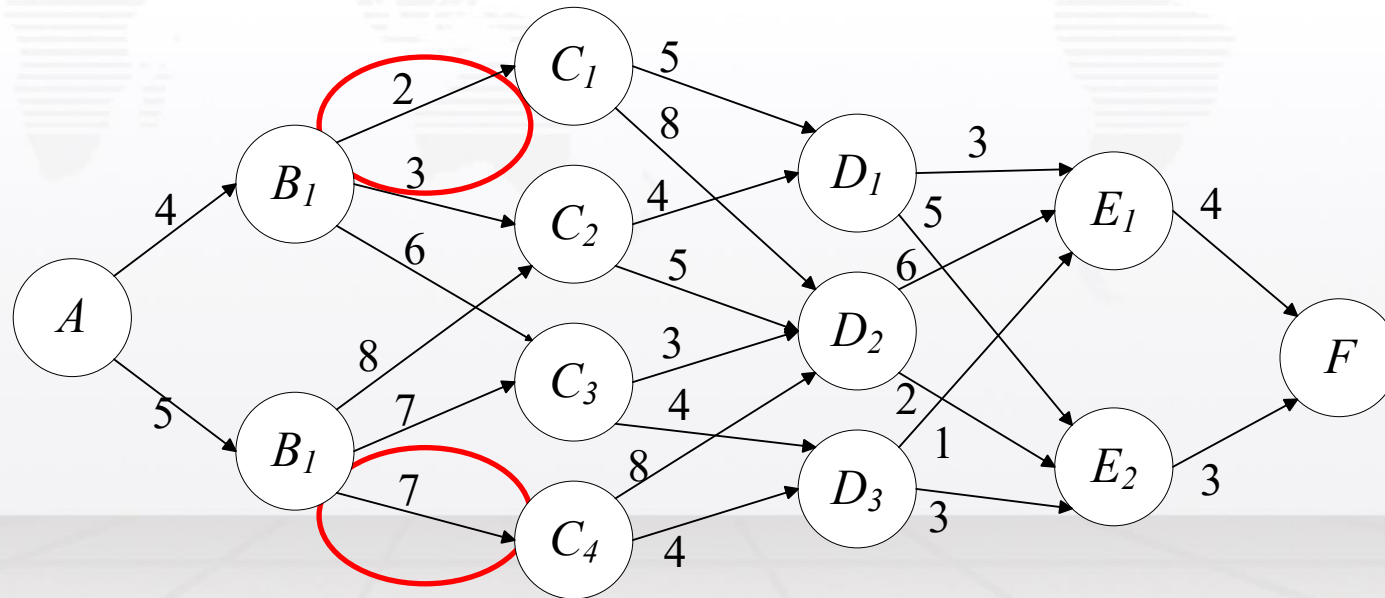


第五节 动态规划

(3) 决策变量

决策就是某阶段状态给定之后，从该状态演变到下一阶段某状态的选择。

$U_k(S_k)$ 表示第 k 阶段处于 S_k 状态时的决策, $D_k(S_k)$ 表示第 k 阶段从状态 S_k 出发的允许决策集合。



第五节 动态规划

(4) 状态转移方程

确定过程由状态 S_k 到 S_{k+1} 的演变过程称为状态转移方程

记作 $S_{k+1}=T_k(S_k, U_k)$ 。

(5) 指标函数

从来衡量所实现过程优劣的一种数量指标，称为指标函数。

指数函数的最优值，就是最优指数函数。

第五节 动态规划

□ 动态规划的基本原理

生活中的常识告诉我们,最短路线有一重要特性如果由A经过 B_1, C_2, D_2, E_2 到达终点F是一条最短路线,则由 B_1 出发经过 C_2, D_2, E_2 到达终点F的这条子路线,对于从 B_1 到达终点F的所有可能来说,必定也是最短的。

根据最短路线这一特征,寻找最短路线的方法就是从最后一段开始,由后向前逐步递推计算,求出各点到F的最短路线,最后求出A到F的最短路线。

第五节 动态规划

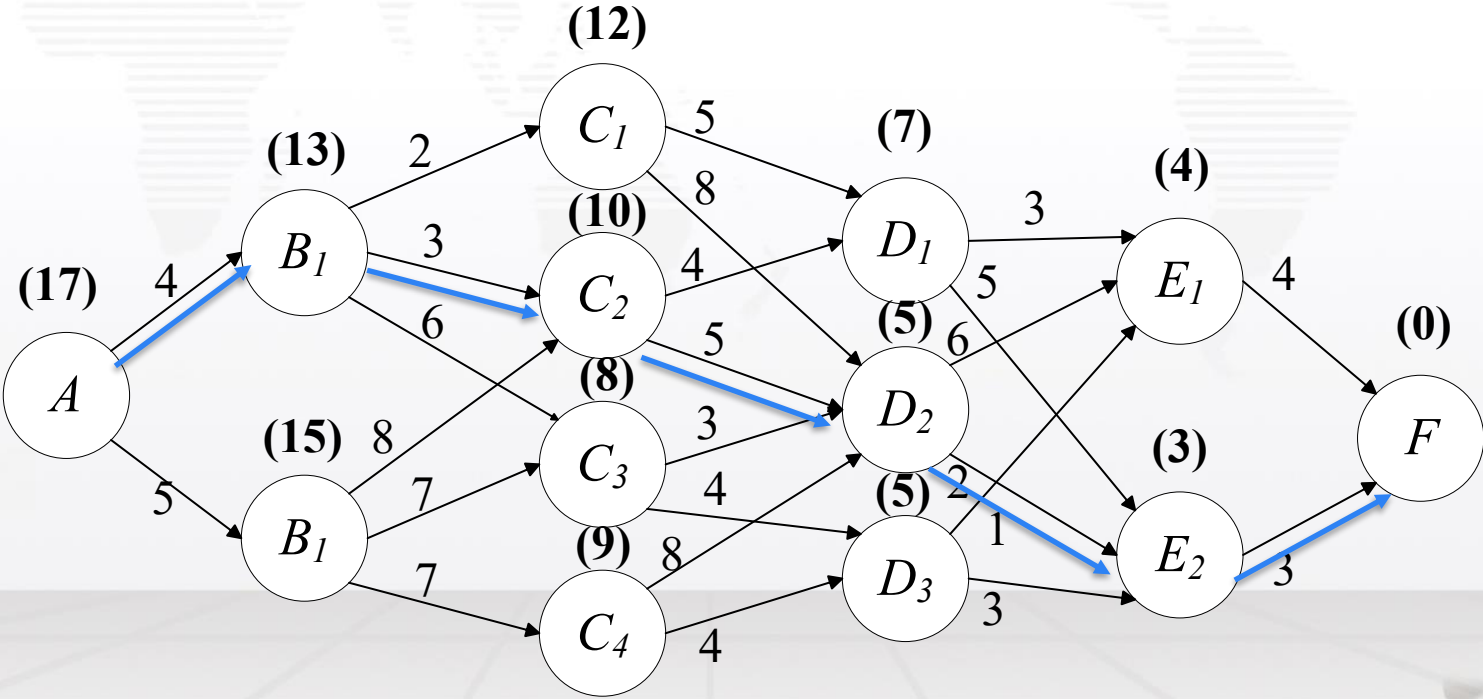
□ 动态规划的基本原理

动态规划的方法是从终点逐段向始点逆序求解。它以贝尔曼的最优性原理为依据，该原理指出多阶段决策过程的最优决策序列具有这样的性质：不论初始状态和初始决策如何，对于前面决策所形成的状态而言，其后各阶段的决策序列必然构成最优策略。

第五节 动态规划

4、动态规划的方法

①逆序过程如图所示。采用标号法求出各点到终点的最短距离。



第五节 动态规划

②动态规划的函数递推法。

$$\begin{cases} f_k(S_k) = \min\{d_k(S_k, U_k) + f_{k+1}(S_{k+1})\} \\ f_6(S_6) = 0 \end{cases}$$

式中， $d_k(S_k, U_k)$ 为阶段指标函数，表示第k阶段状态 S_k 采用策略 U_k 的策略。

最优指数函数 $f_k(S_k)$ 表示从状态 S_k 出发，采取最优策略到达终点的最短距离。

第五节 动态规划

分别求出K=5、4、3、2、1的函数值

当k=5时 $f_5(E_1) = 4, f_5(E_2) = 3$

当k=4时 $f_4(D_1) = \min \begin{cases} d(D_1, E_1) + f_5(E_1) \\ d(D_1, E_2) + f_5(E_2) \end{cases} = \min \begin{cases} 3 + 4 \\ 5 + 3 \end{cases} = 7$

$$f_4(D_2) = \min \begin{cases} d(D_2, E_1) + f_5(E_1) \\ d(D_2, E_2) + f_5(E_2) \end{cases} = \min \begin{cases} 6 + 4 \\ 2 + 3 \end{cases} = 5$$

$$f_4(D_3) = \min \begin{cases} d(D_3, E_1) + f_5(E_1) \\ d(D_3, E_2) + f_5(E_2) \end{cases} = \min \begin{cases} 1 + 4 \\ 3 + 3 \end{cases} = 5$$

第五节 动态规划

当 $k=3$ 时

$$f_3(C_1) = \min \begin{cases} d(C_1, D_1) + f_4(D_1) \\ d(C_1, D_2) + f_4(D_2) \end{cases} = \min \begin{cases} 5 + 7 \\ 8 + 5 \end{cases} = 12$$

$$f_3(C_2) = \min \begin{cases} d(C_2, D_1) + f_4(D_1) \\ d(C_2, D_2) + f_4(D_2) \end{cases} = \min \begin{cases} 4 + 7 \\ 5 + 5 \end{cases} = 10$$

$$f_3(C_3) = \min \begin{cases} d(C_3, D_2) + f_4(D_2) \\ d(C_3, D_3) + f_4(D_3) \end{cases} = \min \begin{cases} 3 + 5 \\ 4 + 5 \end{cases} = 8$$

$$f_3(C_4) = \min \begin{cases} d(C_4, D_2) + f_4(D_2) \\ d(C_4, D_3) + f_4(D_3) \end{cases} = \min \begin{cases} 8 + 5 \\ 4 + 5 \end{cases} = 9$$

第五节 动态规划

当 $k=2$ 时

$$f_2(B_1) = \min \begin{cases} d(B_1, C_1) + f_3(C_1) \\ d(B_1, C_2) + f_3(C_2) \\ d(B_1, C_3) + f_3(C_3) \end{cases} = \min \begin{cases} 2 + 12 \\ 3 + 10 \\ 6 + 8 \end{cases} = 13$$

$$f_2(B_2) = \min \begin{cases} d(B_2, C_2) + f_3(C_2) \\ d(B_2, C_3) + f_3(C_3) \\ d(B_2, C_4) + f_3(C_4) \end{cases} = \min \begin{cases} 8 + 10 \\ 7 + 8 \\ 7 + 9 \end{cases} = 15$$

当 $k=1$ 时

$$f_1(A) = \min \begin{cases} d(A, B_1) + f_2(B_1) \\ d(A, B_2) + f_2(B_2) \end{cases} = \min \begin{cases} 4 + 13 \\ 5 + 15 \end{cases} = 17$$

得到从A到F最短距离为17，其路径为：

A→B1→C2→D2→E2→F

第五节 动态规划

□ 动态规划在采矿中的应用

采矿工程中的许多问题，具有明显的多阶段性，宜用动态规划处理。

目前，主要的应用领域有：

(1) **边际品位的确定**。矿山的边际品位可以逐年变动。为此以年为单位构成不同的阶段，每年可以有不同的边际品位方案供选择（状态），借助动态规划的方法即可求出每年最优的边际品位。

(2) **露天开采境界的确定**。在以规则方块组成的矿床模型中，每一纵列可视作阶段，每列中的第一方块视作不同的状态，通过动态规划可以找出各列各方块间的联系，从而确定出露天矿境界。

第五节 动态规划

(3) **采掘进度计划的编制**。这时以年（月）作为阶段划分整个计划时期，每一阶段又有不同的方案（状态），从而按动态规划的模式去安排采掘进度计划。

(4) **库存控制**。矿山设备的备品备件及主要材料，要有适当的库存量，根据每年的消耗、库存费用和购置费用，可以用动态规划的方法求解。

(5) **设备更新**。矿山设备到了使用后期，由于效率降低和维修费增加，应该用新设备代替。为了确定合理的设备更新策略，可用动态规划处理。



谢谢大家!

