

## 练习一 运动的描述(一)

1.  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $\pi R$

2.  $v_0 + \frac{1}{2}kt^2$ ,  $v_0t + \frac{1}{6}kt^3$ ,  $x_0 + v_0t + \frac{1}{6}kt^3$

3. D

4. C

5. 本题是在直角坐标系中描述物体(质点)运动状态的。

由于已知位矢,可用求导的方法来计算。

因质点的运动方程是  $x = 3t + 5$ 、 $y = \frac{1}{2}t^2 + 3t - 4$ , 则:

(1) 质点  $t$  时刻的位矢为:  $\vec{r} = (3t + 5)\vec{i} + \left(\frac{1}{2}t^2 + 3t - 4\right)\vec{j}$  (m)

(2) 前 4 s 内的位移:  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_4 - \vec{r}_0 = (17\vec{i} + 16\vec{j}) - (5\vec{i} - 4\vec{j}) = 12\vec{i} + 20\vec{j}$  (m)

(3) 前 4 s 内的平均速度: 由  $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$  得,  $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_0}{4 - 0} = \frac{1}{4}(12\vec{i} + 20\vec{j}) = 3\vec{i} + 5\vec{j}$  (m/s)

(4)  $t$  时刻的速度:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3\vec{i} + (t + 3)\vec{j}$  (m/s),  $\vec{v}_4 = 3\vec{i} + 7\vec{j}$  (m/s)

(5) 前 4 s 内的平均加速度: 由  $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$  得,  $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_4 - \vec{v}_0}{4 - 0} = \frac{(3\vec{i} + 7\vec{j}) - (3\vec{i} + 3\vec{j})}{4} = \vec{j}$  (m/s<sup>2</sup>)

(6)  $t$  时刻的加速度:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{j}$  (m/s<sup>2</sup>),  $\vec{a}_4 = \vec{j}$  (m/s<sup>2</sup>)

注意: 对矢量进行计算时可用矢量形式, 也可用分量形式; 对矢量进行表示可用矢量形式, 也可用量值和方向表示。当然使用何种形式, 要视具体情况而定。

## 练习二 运动的描述(二)

1.  $a\cos\beta$ 、 $v$ 、 $\frac{v^2}{a\sin\beta}$

2.  $a_\tau = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$ 、 $a_n = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$

3. C

4. B

5. 本题是在自然坐标系中描述物体(质点)运动状态的。

请大家思考: 怎样由位置  $s$  求出  $v$ 、 $a_\tau$ 、 $a_n$ 、 $\vec{a}$ 、 $a$  以及当  $a_\tau$  已知时怎样求出  $v$ 、 $a_n$ 、 $\vec{a}$ 、 $a$ 、 $s$ 。

由于已知位置或运动方程, 可通过求导的方法计算其他量。

因  $s = \pi t^2$ , 由  $v = \frac{ds}{dt}$ 、 $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ 、 $a_n = \frac{v^2}{R}$ 、 $\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}$  得

$$v = 2\pi t, a_\tau = 2\pi, a_n = 2\pi^2 t^2, \vec{a} = 2\pi\vec{\tau} + 2\pi^2 t^2\vec{n}$$

## 练习三 运动的描述(三)

1.  $\omega_0 + 3t^2$ ,  $\omega_0 t + t^3$

2.  $\beta = 2kt$ ,  $\theta = \frac{1}{3}kt^3$

3. B

4. G

5. 本题是用角量描述物体(质点)运动。

由于已知角位置  $\theta$ , 可通过求导的方法得到  $\omega$ 、 $\beta$ , 然后再利用角量与线量的关系计算得  $v$ 、 $a_\tau$ 、 $a_n$ 。

因  $\theta = \pi t + \frac{1}{3}\pi t^3$ , 由  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  得:  $\omega = \pi + \pi t^2$ ;

由  $\beta = \frac{d\omega}{dt}$  得:  $\beta = 2\pi t$ ;

由角量、线量的关系  $v = R\omega$ 、 $a_\tau = R\beta$ 、 $a_n = R\omega^2$  得

$$v = R\omega = R(\pi + \pi t^2)$$

$$a_\tau = R\beta = R2\pi t$$

$$a_n = R\omega^2 = R(\pi + \pi t^2)^2$$

#### 练习四 运动的描述(四)

1.  $5\pi \text{ rad/s}^2$ ,  $2 \text{ s}$

2.  $R_B:R_A$ ,  $1:1$ ,  $1:1$ ,  $R_B:R_A$

3. D

4. B

5. 本题是关于刚体定轴转动的描述及刚体上质元运动描述的问题。

由于描述刚体的角量与描述刚体上的质元的角量相等, 又已知角加速度  $\beta$ , 可通过积分的方法得到  $\omega$ 、 $\theta$ , 再利用角量与线量的关系求得飞轮上的质元的  $a_\tau$ 、 $a_n$ 。

假设飞轮从静止开始转过  $240^\circ$  所用时间为  $t$ , 初始时刻飞轮角位置为  $\theta_0 = 0$ 。

因  $\beta = \pi t$ , 由  $\beta = \frac{d\omega}{dt}$ 、 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ 、 $\omega_0 = 0$  积分得

$$\omega = \frac{1}{2}\pi t^2, \theta_t - \theta_0 = \frac{1}{6}\pi t^3$$

在  $0 \rightarrow t$  时间内,  $\Delta\theta = 240^\circ = \frac{4\pi}{3}$ 。由  $\Delta\theta = \frac{1}{6}\pi t^3$  得

$$\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{6}\pi t^3$$

$$t = 2$$

由角量、线量的关系:  $a_\tau = R\beta$ 、 $a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$  得

$$a_\tau = R\beta = 0.5\pi \times 2 = \pi (\text{m/s}^2)$$

$$a_n = R\omega^2 = 0.5 \times \left(\frac{1}{2}\pi \times 2^2\right)^2 = 2\pi^2 (\text{m/s}^2)$$

#### 练习五 运动定律(一)

1.  $g \cot \theta$

2.  $12\vec{i} \text{ m/s}$ ,  $9 \text{ m}$

3. D

4. A

5. 本题使用  $\vec{F} = m\vec{a}$  的自然坐标形式计算。

将小球视为质点。取地面为参照系。分析小球受力, 重力和桌面对球的正压力与所求问题无关, 故不考虑。球的牛顿运动方程为  $\vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}$ , 其切向和法向的分量形式为

$$-f = ma_\tau = m \frac{dv}{dt}$$

$$N = ma_n = m \frac{v^2}{R}$$

因  $f = \mu N$ , 有

$$\frac{dv}{dt} = -\mu \frac{v^2}{R}$$

分离变量后, 取积分, 考虑初始条件得

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\frac{\mu}{R} \int_0^t dt$$

积分得

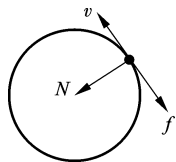
$$v = \frac{v_0 R}{R + \mu v_0 t}$$

由  $v = \frac{ds}{dt}$  得

$$ds = v dt = \frac{v_0 R}{R + \mu v_0 t} dt$$

积分得经历的路程为

$$s = \int_0^s ds = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{v_0 R}{R + \mu v_0 t} dt = \frac{R}{\mu} \ln \frac{R + \mu v_0 t}{R}$$



## 练习六 运动定律(二)

1.  $54 \vec{i}$  (SI)

2.  $\frac{ml}{M+m}$

3. B

4. B, D

5. 本题使用质点动量定理的微分形式  $\vec{F} dt = d\vec{P}$  计算。

链条竖直下落, 作平动, 似乎可看成质点; 但由于链条各质元运动状态不同, 因此要将链条看成是由许多质元组成。从讨论质元与地面的相互作用入手, 最终得到地面与链条的相互作用力。将链条分成三段来讨论: 已落下部分, 即将落下的部分, 未落下的部分。其中未落下的部分与地面无作用。

取地面为参照系。以链条为研究对象, 设  $t$  时刻, 链条落在地面上的长度为  $y$ , 链条的线密度为  $\lambda = \frac{m}{L}$ , 此段长度为  $y$  的链条对地面的作用力就是其重力

$$F_0 = (\lambda y) g = \frac{m}{L} y g$$

再经过  $dt$  时间, 又有长度为  $dy = v dt$  的链条落在地面上, 其质量为

$$dm = \lambda dy = \lambda (v dt)$$

其落地前速度为  $v = \sqrt{2g(h+y)}$ 、方向向下; 其落地后, 静止在地面上, 速度为 0。

设此时落到地面上的  $dy$  段链条受到地面的作用力为  $\vec{F}$ , 取方向向上为正方向。不考虑  $dy$  段链条所受重力。

对  $dt$  时间内下落的  $dy$  段链条应用质点动量定理  $\vec{F} \cdot dt = d\vec{P}$ , 有

$$F dt = 0 - dm(-v), F dt = 0 - [\lambda(v dt)](-v)$$

整理得

$$F = \lambda v^2 = \frac{m}{L} 2g(h+y)$$

由牛顿第三定律得: 链条受地面的作用力与地面受链条的作用力互为作用力与反作用力, 则  $dy$  段链条对地面的作用力为

$$F' = \frac{m}{L} 2g(h+y)$$

另外,再考虑先前已落下静止在地面上的  $y$  段链条对地面的压力,则地面受链条的总作用力为

$$N = F_0 + F' = \frac{m}{L} yg + \frac{m}{L} 2g(h+y) = \frac{m}{L} g(2h+3y)$$

代入  $y=l$  得地面受链条的总作用力为

$$N = \frac{m}{L} (2h+3l)g$$

### 练习七 运动定律(三)

1. 10 J

2.  $GMm\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$

3. C

4. D

5. 用质点动能定理计算。

取水平面为参照系。

(1)用功的定义无法计算出摩擦力做的功,因为摩擦系数未知。但由于已知速率,因此可用质点动能定理。

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m \left( \frac{v_0}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{3}{8} m v_0^2 \quad \text{①}$$

注意:摩擦力与位移方向相反,因此做负功。

(2)假定摩擦系数已知,先用功的定义计算出摩擦力做功的表达式,再利用上面的结果,就可求得摩擦系数。请思考:怎样取位移元  $d\vec{r}$ ?

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi r} (\mu mg) ds \cos 180^\circ = -\mu mg 2\pi r \quad \text{②}$$

由①②两式得  $\mu = \frac{3v_0^2}{16\pi r g}$ 。

(3)假设质点在静止以前要运行  $n$  圈,其路程为  $s = n2\pi r$ , 根据质点动能定理有

$$\int_0^{n2\pi r} \mu mg ds \cos 180^\circ = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

解得  $n = \frac{4}{3}, s = \frac{8}{3} \pi r$ 。

### 练习八 运动定律(四)

1.  $\sqrt{\frac{2Gm_2^2}{(m_1+m_2)l}}$

2.  $\sqrt{\frac{m}{6k}} v_0$

3. B

4. A, C

5. 本题可分为三个过程讨论。首先钢球  $m$  下摆,然后钢球  $m$  与地面上的钢块  $M$  碰撞,最后各自运动。取地面为参照系。小球和钢块均可看成质点。

(1)对钢球  $m$  下摆过程。以钢球  $m$ 、地球为系统,分析钢球受力情况知: $m$  下摆时,只有重力做功,且为内力,因此系统的机械能守恒,设碰撞前钢球的速度为  $\vec{v}$ , 方向水平向右,则

$$mgl = \frac{1}{2} m v^2$$

(2) 对碰撞过程。取钢球  $m$ 、钢块  $M$  为系统, 由于  $m$  与  $M$  作完全弹性碰撞, 则系统的动量守恒、机械能守恒。设碰撞后,  $m$ 、 $M$  的速度分别为  $\vec{v}_1$ 、 $\vec{v}_2$ , 方向水平向右, 有

$$mv = mv_1 + Mv_2, \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2$$

(3) 对碰撞后, 各自运动过程。当  $m$  与  $M$  碰撞后, 继续摆动, 以  $m$ 、地球为系统, 系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh$$

解得  $h = \frac{4}{9}l = \frac{4}{9} \times 0.8 = 0.36(\text{m})$

### 练习九 运动定律(五)

1.  $\frac{mg \cot \theta}{2}$

2.  $\frac{7}{3}md^2$

3. A

4. C

5. 本题用刚体定轴转动定律求解。

$$(1) I = 2md^2 + \frac{1}{12}(3m)(2d)^2 + md^2 = 4md^2$$

(2) 杆转动  $\theta$  角时, 受力情况如图所示。设角加速度为  $\beta$ , 方向为逆时针; 由转动定律  $M = I\beta$  得

$$M = 2mgd \cos \theta - mgd \cos \theta = I\beta$$

$$mgd \cos \theta = I\beta$$

$$\beta = \frac{mgd \cos \theta}{I} = \frac{g \cos \theta}{4d}$$

(3) 设杆转动  $\theta_0$  角时, 杆的角速度为  $\omega_0$

由  $\beta = \frac{d\omega}{dt}$ , 又因已知  $\theta$ , 则

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

$$\frac{g \cos \theta}{4d} = \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

$$\omega d\omega = \frac{g \cos \theta}{4d} d\theta$$

两边积分得  $\int_0^{\omega_0} \omega d\omega = \int_0^{\theta_0} \frac{g \cos \theta}{4d} d\theta$

$$\omega_0^2 = \frac{g \sin \theta_0}{2d}$$

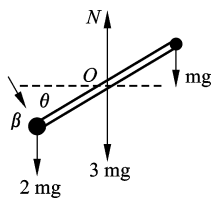
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \sin \theta_0}{2d}}$$

当杆通过铅直位置时,  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ , 则杆的角速度为  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2d}}$ 。

此问也可对杆应用刚体定轴转动的动能定理  $\int M d\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$ 、对杆和地球组成的系统应用机械能守恒原理求解。

由转动动能定理得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2mgd \cos \theta - mgd \cos \theta) d\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 \quad (\text{重力矩作功})$$



$$2mgd - mgd = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 \quad (\text{重力做功})$$

$$\text{其中 } I = 4md^2$$

$$\text{由机械能守恒得 } 0 = \frac{1}{2}I\omega^2 + mgd - 2mgd \quad (\text{取 } O \text{ 点为势能零点})$$

注意思考：如何计算定轴转动刚体的重力势能。

### 练习十 运动定律(六)

$$1. \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$$

$$2. \frac{4}{3}\omega_0, \frac{1}{2}I_0\omega_0^2$$

3. A

4. A

5. 碰撞过程，子弹和杆组成的系统角动量守恒，设杆在碰撞后的角速度为  $\omega$ ，有

$$mv_0l = I\omega \quad \text{①}$$

$$\text{其中 } I = ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2。$$

注意：此处不能使用动量守恒定律。

碰撞后上摆过程，有重力矩做功，由转动动能定理  $\int M d\theta = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$  得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[ - \left( Mg \frac{l}{2} \sin\theta + mgl \sin\theta \right) \right] d\theta &= 0 - \frac{1}{2}I\omega^2 \\ -Mg \frac{l}{2}(1 - \cos 60^\circ) - mgl(1 - \cos 60^\circ) &= 0 - \frac{1}{2}I\omega^2 \end{aligned} \quad \text{②}$$

联立式①②求解可得

$$v_0 = \sqrt{\frac{(2m + M)(3m + M)gl}{6m^2}}$$

对上摆过程，也可对子弹、杆和地球组成的系统应用机械能守恒原理求解。取直杆下端为势能零点，有

$$Mg \frac{l}{2} + \frac{1}{2}(ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2)\omega^2 = mgl(1 - \cos 60^\circ) + Mgl(1 - \frac{1}{2}\cos 60^\circ)$$

注意思考：如何计算定轴转动刚体的重力势能。

### 练习十一 运动定律(七)

$$1. \sqrt{3gl}$$

$$2. 4\omega, \frac{3}{2}m\omega^2 R^2$$

3. A

4. C

5. 取地面为参照系。在杆的下摆过程中，只有重力矩做功，取杆和地球为系统，那系统的机械能守恒。取  $O$  点为势能零点，设杆在碰撞前的角速度为  $\omega$ ，则

$$0 = \frac{1}{2}I\omega^2 + 2mg\left(-\frac{L}{2}\right) \quad \text{其中 } I = \frac{2}{3}mL^2$$

解得：

$$\omega = \frac{\sqrt{3gL}}{L}$$

由于杆与球发生弹性碰撞，对杆和球组成的系统而言，角动量守恒、机械能守恒；设碰后，球速为  $v$ ，杆的角速度为  $\omega'$ ，则

$$I\omega = I\omega' + mvL$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega'^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

解得

$$v = \frac{4}{5}\sqrt{3gL}, \quad \omega' = -\frac{1}{5}\frac{\sqrt{3gL}}{L}$$

对杆的下摆过程，也可对杆应用转动动能定理求解：

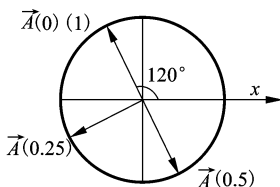
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2mg \frac{L}{2} \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0$$

$$2mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

## 练习十二 机械振动(一)

1.  $1 \text{ s}, \frac{2}{3}\pi, \frac{14}{3}\pi, 5 \text{ s}$

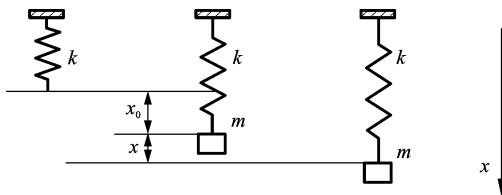
2.



3. C

4. B

5. 请思考：如何证明物体作简谐振动？怎样写出物体的振动方程？



(1)以平衡位置为坐标原点，向下为  $x$  轴的正方向。

在平衡位置时，有

$$mg = kx_0$$

使物体向下离开平衡位置  $x$  距离，此时弹簧的实际伸长量为  $(x + x_0)$ ，则物体所受到的合外力为

$$F = mg - k(x + x_0) = -kx$$

由此可见：物体受到线性回复力的作用，所以物体作简谐振动。

也可写成： $F = -kx = ma$ ， $a + \frac{k}{m}x = 0$ ， $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ ，所以物体作简谐振动。

由  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$  得

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

又由题目知：弹簧下端悬挂质量为 4 kg 的物体时，弹簧伸长 10 cm，则

$$mg = kx_0, k = \frac{mg}{x_0} = \frac{4 \times 10}{0.1} = 400 \text{ (N/m)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{4}} = 10 \text{ (s}^{-1}\text{)}$$

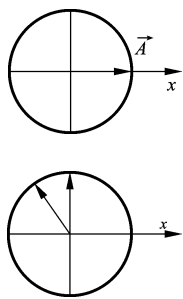
按所设的坐标，振动物体的初始状态为  $x = 10 \text{ cm}$ 、 $v = 0$ ，

作旋转矢量图知： $A = 0.1 \text{ m}$ ， $\varphi_0 = 0$

振动方程为  $x = 0.1 \cos 10t \text{ (SI)}$

(2) 分析物体运动和作旋转矢量图可知：物体从第一次越过平衡位置时刻起到它运动到上方 5 cm 处，所对应的旋转矢量从  $90^\circ$  处转到  $120^\circ$ ，矢量转过了  $30^\circ$ ，而矢量转一周  $360^\circ$  为一周期，则  $\frac{360}{T} = \frac{30}{t}$ ，而  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5}$ ，所以  $t = \frac{\pi}{60} \approx 0.05 \text{ s}$ 。

此问也可以使用解析方法计算。



### 练习十三 机械振动(二)

1. 2:1, 1:4

2.  $T/6$

3. B

4. A

5. 本题是两个同方向、同频率的振动的合成问题。

振动方向和振动频率相同的两个简谐振动的合振动仍是简谐振动，其振动方向和振动频率都与原来的两个分振动相同。

(1) 作旋转矢量图，得

合振动振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{0.3^2 + 0.4^2} = 0.5 \text{ (m)}$$

合振动初相位

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4} + \arctan \frac{3}{4} \text{ 或 } \varphi_0 = \arctan 7$$

合振动方程为

$$x = 0.5 \cos(8t + \varphi_0)$$

(2) 两个同方向、同频率的振动的合振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

式中  $\varphi_2 - \varphi_1$  为两分振动的位相差。

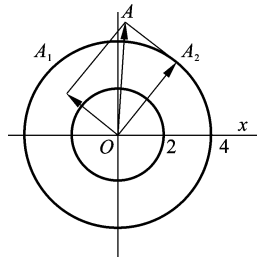
$x_1$  与  $x_3$  合成， $A$  最大，则  $\varphi_3 - \varphi_1 = 2k\pi$ ， $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$(8t + \varphi_{30}) - \left(8t + \frac{3\pi}{4}\right) = 2k\pi$$

$$\varphi_{30} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$\varphi_{30} = \frac{3\pi}{4}$$

$x_2$  与  $x_3$  合成， $A$  最小，则  $\varphi_3 - \varphi_2 = (2k + 1)\pi$ ， $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



$$(8t + \varphi_{30}) - \left(8t + \frac{\pi}{4}\right) = (2k + 1)\pi$$

$$\varphi_{30} = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$$

$$\varphi_{30} = \frac{5}{4}\pi$$

注意：初相位的取值范围一般为 $[0, 2\pi]$ 或者 $[-\pi, +\pi]$ 。

#### 练习十四 机械波(一)

1. 机械振动在弹性媒质中的传播过程, 振动状态, 振动位相

2.  $(\lambda, u), f$

3. B

4. D

5. (1) 将  $y = a\cos(bt - cx)$  与标准波动方程  $y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$  比较。

$$y = a\cos(bt - cx) = a\cos\left[b\left(t - \frac{x}{\frac{b}{c}}\right) + 0\right]$$

振幅  $A = a$ , 圆频率  $\omega = b$ , 频率  $\nu = \frac{b}{2\pi}$ , 周期  $T = \frac{2\pi}{b}$ , 波速  $u = \frac{b}{c}$ , 波长  $\lambda = \frac{2\pi}{c}$

(2) 将  $x = l$  代入波动方程  $y = a\cos(bt - cx)$  即可得  $l$  处质点的振动方程。

$$y = a\cos(bt - cl)$$

(3) 设在波的传播方向上相距为  $d$  的两点为  $x_1, x_2$ , 取  $|x_1 - x_2| = d$ 。由波动方程得  $x_1$  和  $x_2$  处质点的振动方程分别为

$$y_1 = a\cos(bt - cx_1)$$

$$y_2 = a\cos(bt - cx_2)$$

$t$  时刻,  $x_1$  和  $x_2$  处质点之间的位相差为

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (bt - cx_1) - (bt - cx_2) = -c(x_1 - x_2)$$

对上式取绝对值

$$|\Delta\varphi| = c|x_1 - x_2|$$

因  $|x_1 - x_2| = d$ , 则两点之间的相位差为

$$|\Delta\varphi| = |\varphi_1 - \varphi_2| = cd$$

#### 练习十五 机械波(二)

1. 波线上任意位置的质点在任意时刻相对平衡位置的位移;  $x$  处的质点在不同时刻的位移, 即该质点的振动方程; 在给定时刻  $t$ , 波线上各质点对各自平衡位置的位移, 即该时刻的波形方程

2.  $1.58 \times 10^5 \text{ W/m}^2, 3.79 \times 10^3 \text{ J}$

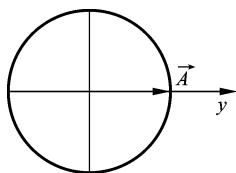
3. A

4. C

5. 请思考: 怎样写出波动方程? 怎样写出某时刻的波形方程? 怎样求出某点的振动方程? 怎样求出某点在某时刻的位移和速度?

(1) 已知波源的振动周期  $T = 0.5 \text{ s}$ 、振幅  $A = 0.1 \text{ m}$ ; 另  $t = 0$  时, 波源质点的位移为正方向的最大值, 作旋转矢量图, 知波源质点的初相位  $\varphi_0 = 0$ 。则波源质点的振动方程为

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0) = 0.1\cos 4\pi t (\text{m})$$



因波长  $\lambda = 10 \text{ m}$ 、波的周期  $T = 0.5 \text{ s}$ ，则波速  $u = \frac{\lambda}{T} = \frac{10}{0.5} = 20 \text{ m/s}$ 。

取波源为坐标原点，而波沿  $x$  轴正方向传播， $x$  处质点的振动落后波源  $\frac{x}{u}$  时间， $x$  处质点在  $t$  时刻的振动是波源在  $t - \frac{x}{u}$  时刻的振动，则  $x$  处质点在  $t$  时刻的振动为

$$y = 0.1 \cos \left[ 4\pi \left( t - \frac{x}{u} \right) \right] = 0.1 \cos \left[ 4\pi \left( t - \frac{x}{20} \right) \right] (\text{m}), \text{ 即为波动方程。}$$

(2)  $t = \frac{T}{4} = \frac{0.5}{4} = \frac{1}{8} \text{ s}$ ，将  $t = \frac{1}{8} \text{ s}$  代入波动方程得波形方程。

$$y = 0.1 \cos \left[ 4\pi \left( \frac{1}{8} - \frac{x}{20} \right) \right] = 0.1 \sin \frac{\pi}{5} x (\text{m}), \text{ 波形为正弦曲线。}$$

(3)  $t = \frac{T}{4} = \frac{1}{8} \text{ s}$ ，质点坐标  $x = \frac{\lambda}{2} = 5 \text{ m}$ ，将  $t = \frac{1}{8} \text{ s}$ 、 $x = 5 \text{ m}$  代入波动方程得质点位移

$$y = 0.1 \cos \left[ 4\pi \left( \frac{1}{8} - \frac{5}{20} \right) \right] = 0.1 \cos \left[ 4\pi \left( -\frac{1}{8} \right) \right] = 0$$

由  $v = \frac{\partial y}{\partial t}$ ，对波动方程求导得速度方程： $v = \frac{dy}{dt} = -0.4\pi \sin \left[ 4\pi \left( t - \frac{x}{20} \right) \right]$

将  $t = \frac{1}{8} \text{ s}$ 、 $x = 5 \text{ m}$  代入得质点速度： $v = -0.4\pi \sin \left[ 4\pi \left( \frac{1}{8} - \frac{5}{20} \right) \right] = 0.4\pi = 1.26 (\text{m/s})$

也可这样做：将质点坐标  $x = 5 \text{ m}$  代入波动方程得该质点振动方程，再由  $v = \frac{dy}{dt}$  可得速度方程，最后将  $t = \frac{1}{8} \text{ s}$  代入得质点的位移及速度。

### 练习十六 机械波(三)

1. 频率相同、振动方向相同、周相差恒定的波源；  
某些点处振动始终加强，另一些点处振动始终减弱或完全抵消。
2.  $0.7 \text{ cm}$
3. C
4. A
5. 反射点自由时，反射点形成波腹，反射波在反射点无半波损失。

(1) 入射波方程为： $y = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$

入射波在反射点  $x = 0$  处的振动为： $y = A \cos 2\pi \frac{t}{T}$

反射波在反射点  $x = 0$  处的振动为： $y = A \cos 2\pi \frac{t}{T}$

从入射波方程可知：入射波沿  $x$  轴负向传播，则反射波沿  $x$  轴正向传播。

反射波方程为： $y = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

(2) 合成波方程为

$$y = y_{\text{入}} + y_{\text{反}} = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) + A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

波腹点  $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1$ ， $2\pi \frac{x}{\lambda} = k\pi$ ， $x = k \frac{\lambda}{2} = 2k \frac{\lambda}{4}$

波节点  $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$ ， $2\pi \frac{x}{\lambda} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $x = k \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$

(3) 反射点固定时, 反射点为波节, 反射波在反射点有半波损失

反射波在反射点  $x=0$  处的振动为:  $y = A\cos\left(2\pi\frac{t}{T} \pm \pi\right)$

从入射波方程可知: 入射波沿  $x$  轴负向传播, 则反射波沿  $x$  轴正向传播。

反射波方程为:  $y = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \pm \pi\right]$

### 练习十七 气体动理论基础(一)

1. 相同, 不同, 相同

2.  $1:1$ ,  $5:3$ ,  $2:1$ ,  $10:3$ ,  $10:3$

3. C

4. B

5. 由  $PV = \frac{M}{\mu}RT$ , 有

$$\mu = \frac{M}{V} \frac{RT}{P} = 0.24 \times \frac{8.31 \times 300}{3 \times 10^5} \approx 2 \times 10^{-3} (\text{kg/mol}) = 2 (\text{g/mol})$$

所以气体为  $\text{H}_2$ 。

$$\text{由 } P = \frac{1}{3}nm\bar{v}^2 = \frac{1}{3}\rho\bar{v}^2 \text{ 得}$$

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} = \sqrt{\frac{3 \times 3 \times 10^5}{0.24}} \approx 1936 (\text{m/s})$$

### 练习十八 气体动理论基础(二)

1. 表示在平衡态下, 单位体积内速率处于区间  $v \sim (v + dv)$  内的分子数

2.  $>$

3. D

4. A

5. (1) 由  $f(v) \sim v$  图可知

$$f(v) = c \quad 0 \leq v \leq v_0$$

$$f(v) = 0 \quad v \geq v_0$$

代入  $f(v)$  的归一化条件  $\int_0^\infty f(v) dv = 1$ , 有  $\int_0^{v_0} c dv + \int_{v_0}^\infty 0 dv = 1$ ,  $cv_0 = 1$ , 所以

$$c = \frac{1}{v_0}$$

(2) 平均速率为

$$\bar{v} = \int_0^\infty vf(v) dv = \int_0^{v_0} vf(v) dv + \int_{v_0}^\infty vf(v) dv = \int_0^{v_0} vc dv + \int_{v_0}^\infty v0 dv$$

$$= \int_0^{v_0} v \frac{1}{v_0} dv = \frac{1}{v_0} \int_0^{v_0} v dv = \frac{v_0}{2}$$

$$\bar{v}^2 = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = \int_0^{v_0} v^2 f(v) dv + \int_{v_0}^\infty v^2 f(v) dv = \int_0^{v_0} v^2 c dv + \int_{v_0}^\infty v^2 0 dv$$

$$= \int_0^{v_0} v^2 \frac{1}{v_0} dv = \frac{1}{v_0} \int_0^{v_0} v^2 dv = \frac{v_0^2}{3}$$

则方根均速率为

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \frac{v_0}{\sqrt{3}}$$

## 练习十九 热力学基础(一)

1. 相同, 不相同

2.  $a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$ , 降低

3. C

4. B

5. (1) 对  $abc$  过程

$$Q_1 = 350(\text{J})$$

$$A_1 = 126(\text{J})$$

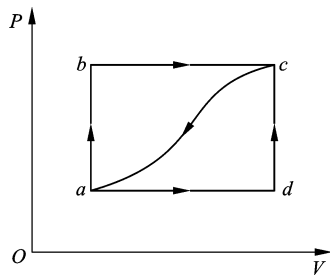
$$\Delta E_1 = Q_1 - A_1 = 224(\text{J})$$

对  $adc$  过程

$$A_2 = 42(\text{J})$$

$$\Delta E_2 = \Delta E_1 = 224(\text{J})$$

$$Q_2 = \Delta E_2 + A_2 = 266(\text{J})$$

(2) 对  $abca$  过程

$$\Delta E = 0$$

$$A = A_{abc} + A_{ca} = A_1 + A_{ca} = 126 + (-84) = 42(\text{J})$$

$$Q = Q_{abc} + Q_{ca} = Q_1 + Q_{ca} = 350 + Q_{ca}$$

另外  $Q = \Delta E + A = 0 + 42 = 42$ , 代入上式得

$$Q_{ca} = -308(\text{J}) \text{ (放热)}$$

或对  $ca$  过程:  $\Delta E = -\Delta E_1 = -224(\text{J})$ 

$$A = -84(\text{J}),$$

$$Q = \Delta E + A = -224 + (-84) = -308(\text{J})$$

## 练习二十 热力学基础(二)

1. 等压过程; 绝热过程; 等压过程; 绝热过程

2. 等压,  $\frac{1}{2}RT_0$ 

3. A

4. C

5. 两过程的  $P-V$  图如图所示。(1)  $I \rightarrow II$  绝热膨胀过程

$$Q = 0$$

$$\Delta E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} R (T_2 - T_1)$$

由热力学第一定律  $Q = \Delta E + A$  得

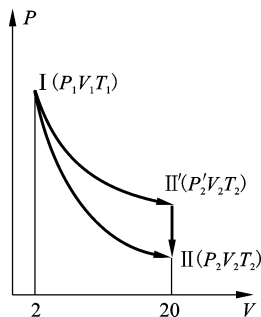
$$A = Q - \Delta E = -\Delta E$$

由绝热过程方程  $V^{\gamma-1}T = \text{恒量}$ , 有  $V_1^{\gamma-1}T_1 = V_2^{\gamma-1}T_2$ , 则

$$T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1$$

而  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1.4$ , ( $O_2$  双原子  $i=5$ )

$$\text{则 } T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1 = \left(\frac{2 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}}\right)^{1.4-1} \times 300 \approx 119(\text{K})$$



$$\Delta E = \frac{i}{2}R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2} \times 8.31 \times (119 - 300) \approx -3747(\text{J})$$

$$A = -\Delta E = 3747(\text{J})$$

(2)  $\text{I} \rightarrow \text{II}' \rightarrow \text{II}$  过程分成两个分过程讨论。

$$\begin{aligned} \text{I} \rightarrow \text{II}' \text{ 等温过程: } A_1 &= \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{M}{\mu} \frac{RT_1}{V} dV = \frac{M}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= 1 \times 8.31 \times 300 \ln \frac{20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \approx 5740(\text{J}) \end{aligned}$$

$$\text{II}' \rightarrow \text{II} \text{ 等容过程: } A_2 = 0$$

$$\text{对整个 } \text{I} \rightarrow \text{II}' \rightarrow \text{II} \text{ 过程: } A = A_1 + A_2 = 5740(\text{J})$$

(3) 由  $P = nkT = \frac{N}{V}kT$  知: 对等温膨胀过程,  $P$  只随  $V$  的增大而减小; 而绝热膨胀过程, 随  $V$  的增大和  $T$  的降低,  $P$  减小较快; 当系统从同一初状态膨胀相同体积时, 绝热膨胀曲线下方的面积比等温膨胀曲线下方的面积小, 所以等温过程作的功比绝热过程多。

### 练习二十一 热力学基础(三)

1. 不可能制成这样一种循环动作的热机, 只从单一热源吸热, 使之完全变成有用的功, 而不引起其他物体的变化;

热量不可能自动从低温物体传到高温物体

2. 467, 233

3. B

4. C

5. (1) 循环过程为  $abcda$ , 可分为四个分过程讨论。

$a \rightarrow b$  等容过程

$$A_1 = 0$$

$$\Delta E_1 = \frac{i}{2}R(T_b - T_a) = \frac{i}{2}(P_b V_b - P_a V_a) = 300(\text{J})$$

$$Q_1 = A_1 + \Delta E_1 = \frac{i}{2}(P_b V_b - P_a V_a) = 300(\text{J}) > 0, \text{ 吸热}$$

$b \rightarrow c$  等压过程

$$\Delta E_2 = \frac{i}{2}R(T_c - T_b) = \frac{i}{2}(P_c V_c - P_b V_b) = 300(\text{J})$$

$$A_2 = P_b(V_c - V_b) = 200(\text{J})$$

$$Q_2 = \Delta E_2 + A_2 = \frac{i}{2}(P_c V_c - P_b V_b) + P_b(V_c - V_b) = 500(\text{J}) > 0, \text{ 吸热}$$

$c \rightarrow d$  等容过程

$$A_3 = 0$$

$$\Delta E_3 = \frac{i}{2}R(T_d - T_c) = \frac{i}{2}(P_d V_d - P_c V_c) = -450(\text{J})$$

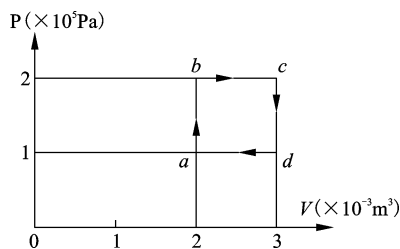
$$Q_3 = A_3 + \Delta E_3 = \frac{i}{2}(P_d V_d - P_c V_c) = -450(\text{J}) < 0, \text{ 放热}$$

$d \rightarrow a$  等压过程

$$\Delta E_4 = \frac{i}{2}R(T_a - T_d) = \frac{i}{2}(P_a V_a - P_d V_d) = -150(\text{J})$$

$$A_4 = P_a(V_a - V_d) = -100(\text{J})$$

$$Q_4 = \Delta E_4 + A_4 = \frac{i}{2}(P_a V_a - P_d V_d) + P_a(V_a - V_d) = -250(\text{J}) < 0, \text{ 放热}$$



(2) 循环过程中气体从外界吸收的热量

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{i}{2}(P_b V_b - P_a V_a) + \frac{i}{2}(P_c V_c - P_b V_b) + P_b(V_c - V_b) = 300 + 500 = 800(\text{J})$$

请思考：为什么计算气体从外界吸收的热量时，不考虑  $Q_3$  和  $Q_4$ ？

注意：也可直接用定压、定容摩尔热容量来计算气体从外界吸收的热量。

(3) 经历一次循环过程，系统对外作的净功

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 + P_b(V_c - V_b) + 0 + P_a(V_a - V_d) \\ &= 0 + 200 + 0 + (-100) = 100(\text{J}) \end{aligned}$$

注意：也可通过计算闭合曲线所围的面积来确定系统对外作的净功。

也可利用循环特性  $\Delta E = 0$  和热力学第一定律来计算。

对循环有  $\Delta E = 0$ ，由热力学第一定律  $Q = \Delta E + A$  有： $A = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$

$$(4) \text{ 循环效率 } \eta = \frac{A}{Q} = \frac{100}{800} = 12.5\%$$

## 练习二十二 静电场(一)

1. 水平向左,  $\frac{mg \tan \theta}{q}$

2.  $2a$

3. C

4. A

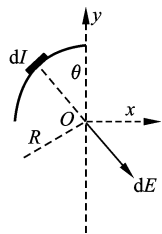
5. 利用点电荷电场强度公式和场强叠加原理计算。

如图所示，在半圆周上与  $y$  轴正向夹角为  $\theta$  处取一长度元  $dl$ ，其所带电量

$$dq = \frac{q}{\pi R} dl = \frac{q}{\pi R} R d\theta = \frac{q}{\pi} d\theta$$

由点电荷场强公式  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0$  得：电荷元  $dq$  在圆心  $O$  点处产生的场强为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} d\theta, \text{ 方向如图}$$



由于半圆周上任意电荷元  $dq$  在圆心  $O$  点产生的场强方向不相同，则将  $d\vec{E}$  对坐标系分解

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \cos \theta d\theta$$

$$dE_x = dE \sin \theta = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \sin \theta d\theta$$

对上两式积分得

$$E_y = \int dE \cos \theta = \int_0^\pi \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \cos \theta d\theta = 0$$

$$E_x = \int dE \sin \theta = \int_0^\pi \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \sin \theta d\theta = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$$

由  $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$  得

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} \vec{i}, \text{ 方向沿 } x \text{ 轴正向}$$

## 练习二十三 静电场(二)

1.  $\pm \pi R^2 E$

2. (1) 经过  $P$  点，以直线为轴、长为  $l$  的封闭圆柱面。

(2) 经过  $P$  点的同心球面。

3. D

4. C

5. 用高斯定理计算。

由于电荷分布的轴对称性, 可知带电圆柱面产生的电场也具有轴对称性, 即离圆柱面轴线垂直距离相等的各点场强大小相等, 方向都垂直于圆柱面。

过场点作高为  $l$ 、底面半径为  $r$  的同轴封闭圆柱面为高斯面。通过高斯面两底面的电通量为 0, 因两底面上的任意面元的方向与面元处场强的方向垂直, 而侧面上的任意面元  $d\vec{S}$  的方向  $\vec{n}$  与面元处场强  $\vec{E}$  的方向相同, 且侧面上各点场强大小相等, 则通过高斯面的电通量为

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{侧}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{侧}}} E \cdot dS \cos 0^\circ = E \int_{S_{\text{侧}}} dS = E 2\pi r l$$

(1) 当  $r < R_1$  时, 此高斯面包围的电量为  $\sum q = 0$ , 由高斯定理  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$ , 得

$$E 2\pi r l = \frac{0}{\epsilon_0}, E = 0$$

(2) 当  $R_1 < r < R_2$  时, 此高斯面包围的电量为  $\sum q = \lambda l$ , 由高斯定理得

$$E 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}, E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \text{方向垂直于轴线向外}$$

(3) 当  $r > R_2$  时, 此高斯面包围的电量为  $\sum q = 0$ , 由高斯定理得

$$E 2\pi r l = \frac{0}{\epsilon_0}, E = 0$$

### 练习二十四 静电场(三)

$$1. \frac{q_1 - q_2}{2\pi\epsilon_0 R}, \frac{-q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

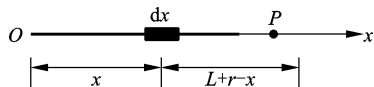
$$2. \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{1}{d+r} - \frac{1}{r} \right)$$

3. A

4. A

5. (1) 建如图所示坐标, 在细棒上距  $O$  点  $x$  处任取一长度元

$dx$ , 其带电量  $dq = \frac{q}{L} dx$ 。



由点电荷的电势公式  $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  得:  $dq$  在  $P$  点的电势为

$$dU_P = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 (L+r-x)} = \frac{q dx}{4\pi\epsilon_0 L (L+r-x)}$$

由电势叠加原理得

$$U_P = \int dU_P = \int_0^L \frac{q dx}{4\pi\epsilon_0 L (L+r-x)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{r+L}{r}$$

$$(2) \text{同理, } U_Q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{3r+L}{3r}$$

电荷  $q_0$  从  $P$  移到  $Q$  点, 其电势能的增量为

$$\Delta W = W_Q - W_P = q_0 U_Q - q_0 U_P = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{3r+L}{3(r+L)}$$

$$\text{利用电场力做功与电势能的关系知: } A = -\Delta W = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{3(r+L)}{3r+L}$$

## 练习二十五 静电场与导体和电介质(一)

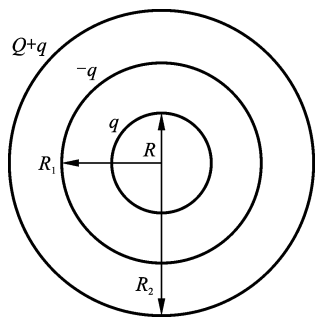
1.  $\frac{3}{8}F, \frac{4}{9}F$

2.  $\frac{\sigma_0}{2} - \varepsilon_0 E_0, \left(E_0 - \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\right)\vec{i}$

3. B

4. A

5. (1) 静电平衡时, 电荷分布如图所示。

利用高斯定理  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$  得场强分布为:当  $r < R$  时,  $E = 0$ ;当  $R < r < R_1$  时,  $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ , 方向沿半径向外;当  $R_1 < r < R_2$  时,  $E = 0$ ;当  $r > R_2$  时,  $E = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ , 方向沿半径向外。利用场强与电势的关系  $U = \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$  计算得球和球壳的电势分别为(取沿半径向外的路径为积分路径, 在此路径上距球心  $r$  处取长度元  $d\vec{r}$ , 其方向沿半径向外)

$$\begin{aligned}
 U_{\text{球}} &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E dr \cos 0^\circ = \int_r^R E dr + \int_R^{R_1} E dr + \int_{R_1}^{R_2} E dr + \int_{R_2}^\infty E dr \\
 &= 0 + \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \right) + 0 + \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}
 \end{aligned}$$

请思考: 为什么要分段积分? 因  $E$  的分布不同。

$$U_{\text{球壳}} = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 + \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

球和球壳的电势差  $\Delta U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right)$

(2) 球壳接地时, 球和球壳之间场强分布不变, 所以电势差不变。

(3) 若用导线连接, 则两者为等势体, 电势差  $\Delta U = 0$ 。

## 练习二十六 静电场与导体和电介质(二)

1. 2, 1.6

2.  $\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} U}{\varepsilon_{r2} d_1 + \varepsilon_{r1} d_2}, 0$

3. C

4. A

5. 由高斯定理  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$ , 可得场强分布为:

当  $r < R$  时,  $E = 0$ ;当  $R < r < R+d$  时,  $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$ , 方向沿半径向外;当  $r > R+d$  时,  $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ ; 方向沿半径向外。

由  $U = \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$ , 可得电势分布为:

当  $r < R$  时,

$$\begin{aligned} U &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E dr \cos 0^\circ \\ &= \int_r^R E dr + \int_R^{R+d} E dr + \int_{R+d}^\infty E dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R+d)} \end{aligned}$$

当  $R < r < R+d$  时,

$$U = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R+d} E dr + \int_{R+d}^\infty E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R+d} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R+d)}$$

当  $r > R+d$  时,

$$U = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

### 练习二十七 稳恒磁场 (一)

1.  $\frac{\mu_0 I}{4R}$ , 垂直于纸面向里

2.  $\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d}$

3. C

4. D

5. 先利用毕奥-萨伐尔定律  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$  分别计算  $AB$ 、 $BCD$ 、 $DE$  三段载流导线在  $O$  点处的磁感应强度。

对  $AB$  载流导线:  $\vec{B}_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{k}$

对  $BCD$  载流导线:  $\vec{B}_{BCD} = \frac{\mu_0 I}{4R} \vec{k}$

对  $DE$  载流导线:  $\vec{B}_{DE} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{j}$

再利用叠加原理得  $O$  点处的磁感应强度。

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BCD} + \vec{B}_{DE} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{j} + \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R} \right) \vec{k}$$

### 练习二十八 稳恒磁场 (二)

1.  $\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$ ,  $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

2.  $\mu_0 (I_1 - I_2)$ ,  $\mu_0 I_2$

3. D

4. C

5. 用安培环路定理和叠加原理计算。

首先将无限长薄板电流视为由无限根直线电流组成, 用安培环路定理计算出某根直线电流在  $P$  点的磁感应强度, 再利用叠加原理求出薄板电流在  $P$  点处的磁感应强度。

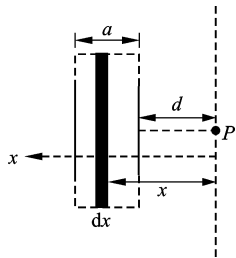
在金属板上与  $P$  点相距为  $x$  处任取一宽为  $dx$  的细长条, 其中电流  $dI = \frac{I}{a} dx$ , 由安培环路定律  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} =$

$\mu_0 \sum I$  得:  $dI$  在  $P$  点的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi x} = \frac{\mu_0}{2\pi x} \frac{I}{a} dx, \text{ 方向垂直纸面向里}$$

因各细长条在  $P$  点的  $d\vec{B}$  的方向相同, 由叠加原理得  $P$  点的磁感应强度为

$$B = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0}{2\pi x} \frac{I}{a} dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{d+a}{d}, \text{ 方向垂直纸面向里}$$



### 练习二十九 稳恒磁场(三)

1.  $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 v^2}$

2. D

3. A

4. A

5. 用安培定律  $d\vec{F}$  计算。

在  $ab$  上距  $a$  端  $l$  处任取一电流元  $I_2 d\vec{l}$ , 如图所示。由安培环路定理  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$  得: 无限长直线电流在该电流元处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \left( d + l \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}, \text{ 方向垂直纸面向里}$$

由安培定律得该电流元的受力为

$$dF = I_2 dl \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \left( d + l \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \left( d + l \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} dl$$

方向垂直于  $ab$  导线向上, 如图所示。

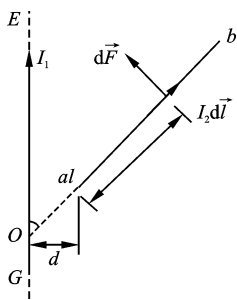
分析  $ab$  导线上各处电流元的受力知: 各电流元的受力方向相同。

由叠加原理得,  $ab$  的受力为

$$F = \int dF = \int_0^L \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \left( d + l \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} dl = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d + \frac{\sqrt{2}}{2} L}{d}$$

$$= 4\sqrt{2} \times 10^{-5} \ln 10 \approx 1.3 \times 10^{-4} (\text{N})$$

方向垂直于  $ab$  导线向上。



### 练习三十 磁介质

1. 铁磁质, 顺磁质, 抗磁质

2. 剩磁, 矫顽力

3. B

4. C

5. 用安培环路定理计算。

因电流对中心轴线分布对称, 其产生的磁场对柱体中心轴线也对称; 磁力线是一组分布在垂直于轴线的平面上并以轴线为中心的同心圆, 与圆柱轴线等距离处的磁感应强度的大小相等, 方向与电流构成右手螺旋关系。

过场点在导体横截面内沿磁力线方向作半径为  $r$  的同心圆形回路, 则回路上各点处的  $\vec{H}$  (或  $\vec{B}$ ) 的量值相等, 方向都与该处长度元  $d\vec{l}$  的方向相同。

$\vec{H}$  沿此回路的环流为

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint H dl \cos 0^\circ = H \oint dl = H 2\pi r$$

回路包围的电流为:

$$\text{当 } r \leq R_1 \text{ 时, } \sum I = \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2;$$

$$\text{当 } R_1 < r < R_2 \text{ 时, } \sum I = I;$$

$$\text{当 } r \geq R_2 \text{ 时, } \sum I = I_0.$$

由安培环路定理  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  得:

$$\text{当 } r \leq R_1 \text{ 时, } H \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2$$

$$H = \frac{Ir}{2\pi R_1^2}, B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

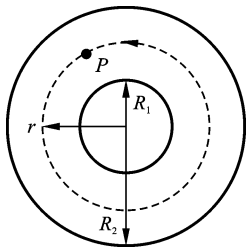
$$\text{当 } R_1 < r < R_2 \text{ 时, } H \cdot 2\pi r = I,$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}, B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

$$\text{当 } r \geq R_2 \text{ 时, } H \cdot 2\pi r = I,$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}, B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

也可利用  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \sum I$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  来计算。



### 练习三十一 电磁感应(一)

$$1. \frac{1}{18} B \omega L^2, \frac{2}{9} B \omega L^2, \frac{1}{6} B \omega L^2$$

$$2. \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln 3, \text{ N}$$

3. B

4. C

5. 设  $t$  时刻, 线圈的  $AD$  边距直导线为  $r$ , 在线圈中距直导线为  $x$  处取一宽度为  $dx$  的细长面元, 其面积为  $dS = a dx$ , 如图所示, 取面积方向为垂直于纸面向里。

由安培环路定理  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$  得: 直线电流在  $x$  处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \text{ 方向垂直纸面向里}$$

则通过面积元的磁通量为

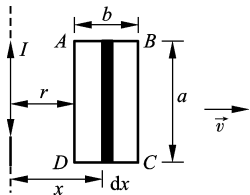
$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS \cos 0^\circ = B dS = B a dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx$$

则通过整个矩形线圈的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_r^{r+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{r+b}{r}$$

由法拉第电磁感应定律  $\xi = -N \frac{d\Phi}{dt}$  得, 线圈中的感应电动势大小为

$$\xi = \left| -N \frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| N \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{b}{(r+b)r} \frac{dr}{dt} \right|$$



当  $r = d$ 、 $\frac{dr}{dt} = v$  时,  $\xi = N \frac{\mu_0 I a b v}{2\pi d(d+b)} = 3 \times 10^{-3} \text{ (V)}$

矩形线圈在向右运动过程中, 通过线圈的磁通量要减少, 由楞次定律可判断出感应电动势的方向为  $ABCD$ , 方向为顺时针。

本题另法: 也可先分别求出矩形线圈的  $BC$ 、 $AD$  两边在图示位置的动生电动势, 然后再合成。

### 练习三十二 电磁感应 (二)

1. 洛伦兹力 涡旋电场力 变化的磁场

2.  $\frac{\mu_0 n k e R}{4m}, 0$

3. A

4. B

5. 设回路的绕行正方向为  $abcda$ , 则回路所围面积的方向为竖直向下。

$t$  时刻通过回路  $abcd$  的磁通量为

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S \cos 120^\circ = (kt)(lvt) \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} k l v t^2$$

由法拉第电磁感应定律得

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt} = k l v t, \xi > 0, \xi \text{ 的方向沿 } abcda$$

### 练习三十三 电磁感应 (三)

1.  $\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3, \frac{\mu_0 a \ln 3}{2\pi} \frac{dI}{dt}$

2.  $1.5 \times 10^8$

3. A

4. A

5. 设在环形螺线管内通以电流  $I$ , 由安培环路定理  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$  可求得: 环内磁感应强度大小为

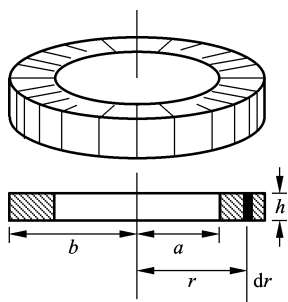
$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

在螺线管横截面上  $r$  处取面元  $dS = h dr$ , 假设  $d\vec{S}$  与  $\vec{B}$  的方向相同, 则通过螺线管横截面的磁通量为

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B dS \cos 0^\circ \\ &= \int_a^b \left( \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \right) (h dr) = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

由自感系数定义  $L = \frac{\Psi}{I}$  得

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$



### 练习三十四 电磁场 电磁波

1. 43PF, 390PF

2.  $0, 0, \epsilon_0 c E_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$

3. D

4. C, C

5. 请思考: 位移电流的本质、位移电流与传导电流的关系, 如何计算变化的电场所激发的磁场。

(1) 电容器中的位移电流与极板间的电场的关系为:  $I_d = \frac{d\Phi_D}{dt}$

又电容器极板间的电位移与极板上电荷的关系为:  $D = \sigma$ 、 $\Phi_D = q$

另极板上电荷与所加电压的关系为:  $q = CU$

所以

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CU)}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

而  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{d}$ 、 $\frac{dU}{dt} = \frac{d(U_0 \sin \omega t)}{dt} = U_0 \omega \cos \omega t$ , 故

$$I_d = \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{d} U_0 \omega \cos \omega t$$

(2) 电容器中的电流密度

$$j_d = \frac{I_d}{\pi R^2} = \frac{\epsilon_0}{d} U_0 \omega \cos \omega t$$

根据全电流的连续性, 导线中的电流强度  $I = I_d$ , 则导线中的电流密度

$$j = \frac{1}{\pi a^2} = \frac{I_d}{\pi a^2} = \frac{R^2}{a^2 d} \epsilon_0 U_0 \omega \cos \omega t$$

(3) 用安培环路定理  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  计算, 而  $B = \mu_0 H$ 。

将电容器中的电场视为均匀电场, 且电场限制在电容器极板之间的柱形空间内。因变化的电场会激发磁场, 则两极板之间变化的电场(或两极板之间的位移电流)激发的磁场对两极板中心连线具有轴对称性。磁力线方向和电流方向之间满足右手螺旋定则。

在处于电容器中且平行于电容器极板的平面内, 以两极板中心连线为圆心、沿磁力线方向作半径为  $r (r \leq R)$  的圆形回路, 则圆形回路所围面积的方向与电场方向相同。

则电容器中的电位移通量为

$$\Phi_D = \int \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int D dS \cos 0^\circ = \int D dS = D \int dS = D \cdot \pi r^2$$

则  $\frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{dD}{dt} \cdot \pi r^2$

由安培环路定理  $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ 、 $B = \mu_0 H$  得

$$\frac{B}{\mu_0} \cdot 2\pi r = \frac{dD}{dt} \cdot \pi r^2$$

而  $\frac{dD}{dt} = j_d = \frac{\epsilon_0}{d} U_0 \omega \cos \omega t$ , 所以

$$B = \frac{1}{2d} \mu_0 \epsilon_0 U_0 \omega \cos \omega t$$

### 练习三十五 光的干涉(一)

1.  $\pm 18000 \text{ \AA}$ ,  $\pm 6\pi$

2. 条纹分布在屏  $E$  上部  $OP$  之间, 明暗分布与原来互换

3. B

4. A

5. 由杨氏双缝干涉明暗条纹中心位置公式  $x = 2k \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2}$ 、 $x = (2k+1) \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2}$  得: 条纹间距为

$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$$

$$\lambda = \frac{d \Delta x}{D} = \frac{0.6 \times 10^{-3} \times 2.27 \times 10^{-3}}{2.5} \approx 5.45 \times 10^{-7} (\text{m}) = 545 (\text{nm}) = 5450 (\text{\AA})$$

### 练习三十六 光的干涉(二)

1.  $9.96 \times 10^{-8} \text{m}$

2.  $\frac{\lambda}{4}, N \frac{\lambda}{2}$

3. A

4. B

5. (1) 对劈尖干涉, 研究反射光干涉。明条纹应满足:  $2e_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$ ; (对空气, 取  $n=1$ )

相邻条纹间隔  $l$  与厚度关系满足:  $l \sin \theta = e_{k+1} - e_k = \frac{1}{2} \left[ (k+1)\lambda - \frac{\lambda}{2} \right] - \frac{1}{2} \left[ k\lambda - \frac{\lambda}{2} \right] = \frac{\lambda}{2}$ ,

则  $\sin \theta = \frac{\lambda}{2l}$ , 而  $\tan \theta = \frac{d}{L}$ , 由  $\sin \theta \approx \tan \theta$  得:  $\frac{\lambda}{2l} = \frac{d}{L}$ , 解得

$$d = \frac{L\lambda}{2l} = \frac{0.04 \times 5890 \times 10^{-10}}{2 \times 0.1 \times 10^{-3}} = 1.178 \times 10^{-4} (\text{m}) = 0.1178 (\text{mm})$$

(2) 在劈尖中部, 干涉条纹向左移动两个条纹, 说明在此处厚度增加了  $2 \times \frac{\lambda}{2}$ , 因劈尖上表面不是在保持  $\theta$  不变情况下的平移, 所以根据两个直角三角形的相似关系可知: 金属直径处厚度增加了  $4 \times \frac{\lambda}{2}$ , 即

$$\Delta d = 2\lambda = 2 \times 5890 = 1.178 \times 10^{-6} (\text{m}) = 1.178 (\mu\text{m})$$

### 练习三十七 光的衍射(一)

1.  $\frac{5\lambda}{2}, 5$

2.  $0.25 \text{ m}$

3. D

4. B

5. 对单缝衍射, 当  $P$  点为明条纹, 则满足条件:  $a \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ 。

设  $P$  点距中央明纹中心为  $x$ , 则

$$x = f \tan \varphi \approx f \sin \varphi$$

由上面两式得

$$a \frac{x}{f} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

所以

$$k = \frac{ax}{f\lambda} - \frac{1}{2} = \frac{0.6 \times 10^{-3} \times 1.4 \times 10^{-3}}{40 \times 10^{-2} \lambda} - \frac{1}{2}$$

在可见光范围  $3900 \sim 7600 \text{\AA}$ , 求得  $k$  值范围为  $2.3 \sim 4.88$ , 因  $k$  只能取整数, 所以

$$k=3 \quad \text{或} \quad k=4$$

讨论:

当  $k=3$  时,  $\lambda_3 = 6000 \text{\AA}$ , 对应从  $P$  点看狭缝的波阵面可分为  $2k+1=7$  个半波带;

当  $k=4$  时,  $\lambda_4 = 4667 \text{\AA}$ , 对应从  $P$  点看狭缝的波阵面可分为  $2k+1=9$  个半波带。

## 练习三十八 光的衍射(二)

1.  $5000 \text{ \AA}$ , 22.  $1.34 \times 10^{-4} \text{ rad}$ ,  $8.94 \text{ km}$ 

3. A

4. C

5. (1) 设相邻明条纹的级数分别为  $k$ 、 $k+1$ , 对应的衍射角分别为  $\varphi_k$ 、 $\varphi_{k+1}$ 。由光栅衍射明纹条件公式  $(a+b)\sin\varphi = k\lambda$  得

$$(a+b)\sin\varphi_k = k\lambda, (a+b)\sin\varphi_{k+1} = (k+1)\lambda$$

两式相减得:  $(a+b)(\sin\varphi_{k+1} - \sin\varphi_k) = \lambda$ 

$$\text{光栅常数为 } a+b = \frac{\lambda}{\sin\varphi_{k+1} - \sin\varphi_k} = \frac{6000 \times 10^{-10}}{0.3 - 0.2} = 6 \times 10^{-6} \text{ (m)}$$

$$\text{两式相比得: } \frac{k}{k+1} = \frac{\sin\varphi_k}{\sin\varphi_{k+1}} = \frac{0.2}{0.3}, \text{ 解得 } k=2$$

可知: 已知的相邻两明条纹的级数分别为第 2 级、第 3 级。

(2) 由于第四级缺级, 则应同时满足光栅衍射明纹条件公式  $(a+b)\sin\varphi = k\lambda$ 、单缝衍射的暗纹条件公式  $a\sin\varphi = 2k'\frac{\lambda}{2}$ , 则有

$$(a+b)\sin\varphi = 4\lambda, a\sin\varphi = k'\lambda$$

$$\text{两式相比得: } \frac{a}{a+b} = \frac{k'}{4}$$

$$\text{当 } k' \text{ 时, } a \text{ 为最小, } a = \frac{a+b}{4} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ (m)}$$

(3) 由  $(a+b)\sin\varphi = k\lambda$  可知: 衍射角越大, 衍射条纹级数越高。衍射角最大值为  $90^\circ$ , 但  $\varphi = 90^\circ$  时的条纹实际上是看不到的。设条纹的最高级数为  $k_{\max}$ , 则

$$k_{\max}\lambda = (a+b)\sin\varphi_{\max} < (a+b)\sin 90^\circ$$

$$k_{\max} < \frac{(a+b)\sin 90^\circ}{\lambda}$$

$$k_{\max} < 10, \text{ 取 } k_{\max} = 9$$

其中有缺级。

下面讨论缺级: 当光栅衍射满足明纹条件, 而单缝衍射满足暗纹条件, 光栅衍射条纹就会出现缺级。

$$(a+b)\sin\varphi = k\lambda, a\sin\varphi = k'\lambda$$

$$\text{两式相比得: } \frac{k'}{k} = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{4}$$

当  $k' = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots$  时,  $k = \pm 4, \pm 8, \pm 12 \cdots$ , 第 4、8 级缺级,

则可观察到得条纹级数为

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9 \text{ 共 8 级 15 条。}$$

## 练习三十九 光的偏振

1. 双折射, 相同, 相同

2.  $\frac{9}{4}I$

3. A

4. C

5. (1) 设入射角和折射角分别为  $i$ 、 $\gamma$ , 空气和玻璃的折射率分别为  $n_1$ 、 $n_2$ 。

由于反射光是线偏振光，则入射角满足布鲁斯特定律

$$\begin{aligned}\tan i &= \frac{n_2}{n_1} \\ n_1 \sin i &= n_2 \cos i\end{aligned}$$

另由折射定律得： $n_1 \sin i = n_2 \sin \gamma$

由上面两式得： $\sin \gamma = \cos i$

$$\begin{aligned}\gamma &= 90^\circ - i \\ \gamma &= 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ\end{aligned}$$

(2) 由布鲁斯特定律  $\tan i = \frac{n_2}{n_1}$  得： $n_2 = n_1 \tan i = 1 \times \tan 58^\circ = 1.6$

练习四十 狭义相对论(一)

- 1. 93 m, 10 m, 0,  $2.5 \times 10^{-7}$  s
- 2. 12 m, 4 s
- 3. A
- 4. C
- 5. 首先将 A、B 两事件的时空坐标及已知数据列成下表。

|       | S 系中                                          | S' 系中                                                  |
|-------|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| A 事件  | $x_A = ?$ 、 $t_A = ?$                         | $x'_A = ?$ 、 $t'_A = ?$                                |
| B 事件  | $x_B = ?$ 、 $t_B = ?$                         | $x'_B = ?$ 、 $t'_B = ?$                                |
| 时空坐标差 | $x_A - x_B = 2 \times 10^3$ 、 $t_A - t_B = 0$ | $x'_A - x'_B = ?$ 、 $ t'_A - t'_B  = 5 \times 10^{-6}$ |

由题目知：在 S 系中， $t_A - t_B = 0$ ， $x_A - x_B = 2 \times 10^3$  m；S' 系相对 S 系沿 x 正方向运动；在 S' 系中  $|t'_A - t'_B| = 5 \times 10^{-6}$  s。

由  $x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$  得：在 S' 系中两事件的空间间隔为

$$x'_A - x'_B = \frac{(x_A - ut_A) - (x_B - ut_B)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{x_A - x_B}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

对上式取绝对值，有

$$|x'_A - x'_B| = \frac{|x_A - x_B|}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{1}$$

如能知道 u，就可计算出 S' 系中两事件的空间间隔  $|x'_A - x'_B|$ 。

又由  $t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$  得：在 S' 系中两事件的时间间隔为

$$t'_A - t'_B = \frac{t_A - t_B - \frac{u}{c^2}(x_A - x_B)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{-\frac{u}{c^2}(x_A - x_B)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{2}$$

由于  $x_A - x_B = 2 \times 10^3 \text{ m}$ , 知  $t'_A - t'_B < 0$ ,  $A$  事件先发生。

对②式取绝对值, 有

$$|t'_A - t'_B| = \frac{\frac{u}{c^2}(x_A - x_B)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

代入数据得:  $5 \times 10^{-6} = \frac{\frac{u}{c^2} \cdot (2 \times 10^3)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ , 解得  $u = 0.6c$ 。

由①式得在  $S'$  系中两事件的空间间隔为:  $|x'_A - x'_B| = \frac{|x_A - x_B|}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{2 \times 10^3}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = 2.5 \times 10^3 (\text{m})$ 。

最后请思考: 为什么不用长度变换  $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$  和时间变换  $t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$  来计算空间间隔和时间间隔。

#### 练习四十一 狭义相对论(二)

$$1. \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right), \quad E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$2. \quad 75 \text{ m}^3, 150 \text{ kg}, 2 \text{ kg/m}^3$$

3. C

4. A

$$5. \quad \text{由动能定理 } A = E_{k2} - E_{k1}、\text{动能 } E_k = mc^2 - m_0c^2、\text{质能公式 } E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ 得, 把电子的速率从}$$

$v_1 = 0.6c$  加速到  $v_2 = 0.8c$ , 需作功

$$\begin{aligned} A &= E_{k2} - E_{k1} = (m_2c^2 - m_0c^2) - (m_1c^2 - m_0c^2) = m_2c^2 - m_1c^2 \\ &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - 0.8^2}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = \frac{5}{12}m_0c^2 \end{aligned}$$

电子速率为  $v_2 = 0.8c$  时, 它的质量和动量分别是:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = \frac{m_0}{0.6} = \frac{5}{3}m_0$$

$$P = mv_2 = \frac{5}{3}m_0 \times 0.8c = \frac{4}{3}m_0c$$

#### 练习四十二 量子力学基础(一)

1. 黑体辐射分子、原子的振动可看作谐振子, 这些谐振子可以发射和吸收辐射能, 与周围的电磁场交换能量;

这些谐振子只能处于某些分立的状态, 在这些状态中, 谐振子的能量并不象经典物理学所允许的可

取任意值, 只能取一些离散的值, 这些离散的值是某一最小能量  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  称为能量子) 的整数倍, 即  $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots, n\varepsilon, \dots$ ,  $n$  为正整数, 称为量子数。对于频率为  $\nu$  的谐振子来说, 最小能量为  $\varepsilon = h\nu$ , 式中  $h$  为普朗克常数

$$2. \frac{h\nu}{c^2}, \frac{h\nu}{c}, h\nu$$

3. C

4. A, C

5. 不变 增加 增加

6. B, D

7. (1)  $0.033 \text{ \AA}$ ,  $3.8 \times 10^4 \text{ eV}$ ; (2)  $0.043 \text{ \AA}$ ,  $62.3^\circ$ 。

(1) 散射光子的波长

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ &= 0.03 \times 10^{-10} + \frac{2 \times 6.63 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8} \times \sin^2 15^\circ = 0.033 \times 10^{-10} (\text{m})\end{aligned}$$

由能量守恒得: 反冲电子的动能

$$\begin{aligned}E_k &= h\nu_0 - h\nu = hc \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) = 6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \left( \frac{1}{0.03 \times 10^{-10}} - \frac{1}{0.033 \times 10^{-10}} \right) \\ &= 6.03 \times 10^{-15} (\text{J}) = 3.8 \times 10^4 (\text{eV})\end{aligned}$$

(2) 由能量守恒有:  $E_k = mc^2 - m_0c^2 = h\nu_0 - h\nu$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-0.6^2}} c^2 - m_0c^2 = hc \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$0.25m_0c^2 = hc \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} - \frac{0.25m_0c^2}{h} = \frac{1}{0.03 \times 10^{-10}} - \frac{0.25 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8}{6.63 \times 10^{-34}} = 2.32 \times 10^{11} (\text{m}^{-1})$$

$$\lambda = 0.043 \times 10^{-10} (\text{m})$$

$$\text{由 } \Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \text{ 得}$$

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\Delta\lambda m_0c}{2h} = \frac{0.013 \times 10^{-10} \times 9.1 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8}{2 \times 6.63 \times 10^{-34}} = 0.2676$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = 0.5173$$

$$\varphi = 62.3^\circ$$

### 练习四十三 量子力学基础(二)

$$1. E = mc^2 = h\nu, P = mv = \frac{h}{\lambda}$$

$$2. 4.4 \times 10^{-35} \text{ m}$$

$$3. 0.58 \text{ m/s}$$

$$4. 9r_1, 3\hbar, 6$$

5. D

6. C

7.  $\lambda = 1028 \text{ \AA}$ , 属于赖曼系;  $\lambda = 6581 \text{ \AA}$ , 属于巴尔末系;  $\lambda = 1219 \text{ \AA}$ , 属于赖曼系。

设用能量为  $12.6 \text{ eV}$  的电子轰击基态 ( $n=1$ ) 的氢原子, 使氢原子达到的最高能级为  $n$ , 则

$$\left( -\frac{13.58}{n^2} \right) - (-13.58) = 12.6, \text{ 解得: } n = 3.7$$

分析知氢原子可达到的最高激发态为  $n=3$ ，当向低能级跃迁时，可发生如下跃迁：

$$3 \rightarrow 1: h\nu = E_3 - E_1, h \frac{c}{\lambda} = E_3 - E_1, \frac{1}{\lambda} = \frac{E_3 - E_1}{hc}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc} \left[ \left( -\frac{13.58}{3^2} \right) - \left( -\frac{13.58}{1^2} \right) \right] = \frac{13.58}{hc} \left[ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right], \text{属于赖曼系, } \lambda = 1028 \text{ \AA}$$

$$3 \rightarrow 2: \frac{1}{\lambda} = \frac{E_3 - E_2}{hc} = \frac{1}{hc} \left[ \left( -\frac{13.58}{3^2} \right) - \left( -\frac{13.58}{2^2} \right) \right] = \frac{13.58}{hc} \left[ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right], \text{属于巴尔末系, } \lambda = 6581 \text{ \AA}$$

$$2 \rightarrow 1: \frac{1}{\lambda} = \frac{E_2 - E_1}{hc} = \frac{1}{hc} \left[ \left( -\frac{13.58}{2^2} \right) - \left( -\frac{13.58}{1^2} \right) \right] = \frac{13.58}{hc} \left[ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right], \text{属于赖曼系, } \lambda = 1219 \text{ \AA}$$

#### 练习四十四 量子力学基础(三)

1. C

2.  $\frac{3a}{4}, \frac{1}{4}$

3. 薛定谔方程

4.  $\sqrt{6}\hbar, -2\hbar; \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar, -\frac{1}{2}\hbar$

5. A、B、C、D

6. 4